

37 Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

I. Approximation de fonctions continues

1. Formules de Taylor [ROM]

Taylor-Lagrange, Taylor reste intégral, DL, Taylor-Young, inégalités usuelles

2. Approximation sur un compact [GOU] [ELA1]

Théorème de Heine, théorèmes de Dini, polynômes de Bernstein, DEV 1 : théorème de Weierstrass, application avec les intégrales

II. Approximation en théorie de l'intégration

1. Résultats généraux [BRI]

Lemme fondamental d'approximation, densité dans les L^p

2. Polynômes orthogonaux [ELA2] [BMP]

Famille totale, base hilbertienne, poids, $L^2(I, w)$, polynômes orthogonaux, exemples, condition pour que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne

III. Approximation de fonctions périodiques

1. Séries de Fourier [ELA2]

$\mathcal{C}_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, e_n , coefficients de Fourier exponentiels, coefficients de Fourier réels, série de Fourier

2. Convergence au sens de Cesaro [ELA2]

Somme de Cesaro, DEV 2 : théorème de Féjer, corollaires, théorème de Weierstrass trigonométrique

3. Convergence en moyenne quadratique [ELA2]

$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ base hilbertienne, théorème de Parseval

4. Convergence ponctuelle et normale [ELA2] [GOU]

Théorème de Dirichlet, calcul de sommes, théorème sur la CVN

Présentation :

- La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir des résultats plus fins que la formule de Taylor-Lagrange, et donc nécessite une hypothèse supplémentaire. Elle est valable pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.
- Les développements limités permettent d'approcher la fonction en un point par des polynômes. Cela est notamment utile pour la recherche de limites.
- Le théorème de Weierstrass permet d'approcher de façon globale et uniforme des fonctions par des polynômes, qui sont des objets très réguliers et facile à manipuler.
- Le lemme fondamental d'approximation pour les fonctions mesurables est très utile pour démontrer des résultats car permet de faire le chemin de Lebesgue : on montre le résultat pour les indicatrices, puis les fonctions étagées positives, puis les fonctions mesurables positives, et enfin les fonctions intégrables. C'est par exemple le cas pour démontrer le théorème de transfert.
- L'idée de départ des séries de Fourier est d'exprimer toute fonction périodique f comme somme trigonométrique en sinus et cosinus de même période T . En effet, les fonctions sinusoidales sont extrêmement régulières et bien connues, il est donc pertinent d'essayer de s'en rapprocher.

Ces techniques ont été introduites par Fourier afin de résoudre l'équation de la chaleur.

- Les questions centrales de la théorie des séries de Fourier sont :
 - Pour quelles fonctions y a-t-il convergence de $S_N(f)$?
 - Et y a-t-il convergence vers f ?
 - De quel type de convergence ?

Développements :

- Théorème de Weierstrass par les probabilités
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p195
 - Orlaux X-ENS 6, FGN, p259
 - Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani, p158
- Théorème de Féjer
 - Analyse de Fourier, El Amrani, p181

Références :

- [ROM] Eléments d'analyse réelle, Rombaldi
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [ELA1] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [ELA2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Leçon 209: Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

I Approximation de fonctions continues

1) Formules de Taylor [Rom]

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange): Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a, b]$, de classe C^n sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégral): Soit

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Déf 2: On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$ au voisinage de a .

Prop 4: Si f admet un DL à l'ordre n en a , celui-ci est unique.

Théorème 5 (de Taylor-Yang): Si f est de classe C^n sur I , alors elle admet un voisinage de a de DL d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exemple 6: $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ quand $x \rightarrow 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^{n+1}) \quad \text{quand } x \rightarrow 0$$

Application 7: On obtient des inégalités:

$$\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

2) Approximation sur un compact [Gou][EVA4]

Théorème 8 (de Heine): Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, E étant compact. Soit $f: E \rightarrow F$ continue.

Alors f est uniformément continue sur E .

Théorème 9 (de Dini): 1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur I , alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur I , alors (f_n) converge uniformément vers f .

Déf 10: Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f , le polynôme $B_n(f)$ défini par: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Prop 11: Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$.

Théorème 12 (de Weierstrass): Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

DEV 1

Centre-ex 13: Le résultat est faux sur un intervalle $]a, b[$

non compact: prendre $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; 1]$.

Application 14: Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t) t^m dt = 0$. Alors f est la fonction nulle.

II Approximation en théorie de l'intégration

1) Résultats généraux [BR1]

Soit (x, t, μ) un espace mesuré.

Lemme 15 (fondamental d'approximation): Soit $f: (x, t) \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable. Alors il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions étagées tel que pour tout $x \in X$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. De plus:

- 1) Si $f \geq 0$, on peut prendre $(f_n)_n$ croissante et positive.
- 2) Si f est bornée, on peut prendre $(f_n)_n$ de façon à ce que f_n converge uniformément vers f .

Théorème 16: Soit $p \in \mathbb{C}[t; +\infty[$. Alors l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.

Théorème 17: On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Alors:

- 1) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$ pour $p \in \mathbb{C}[a; +\infty[$
- 2) L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$ pour $p \in \mathbb{C}[a; +\infty[$.

2) Polynômes orthogonaux [ELAR2] [ONP]

Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert borné ou non de $\mathbb{R}$.

Déf 18: Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace préhilbertien E est dite totale si elle engendre un sous-espace vectoriel dense dans E .

Déf 19: On appelle base hilbertienne d'un espace préhilbertien E toute famille de E orthonormale et totale.

Déf 20: On appelle poids sur I tout fonction $w: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^m w(x) dx < +\infty$

Déf 21: On appelle espace $L^2(I, w)$ l'espace vectoriel $\{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tel que } \int_I |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty\}$

Remarque 22: $L^2(I, w)$ contient les fonctions polynômes et est muni du produit scalaire usuel:
 $\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) g(x) w(x) dx$.

Prop 23: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux par le produit scalaire de $L^2(I, w)$ et tel que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids w .

Exemple 24: 1) Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $w(x) = e^{-x}$, les P_n sont les polynômes de Laguerre.

2) Si $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = e^{-x^2}$, les P_n sont les polynômes de Hermite.

3) Si $I =]-1; 1[$ et $w(x) = 1$, les P_n sont les polynômes de Legendre.

Prop 25: Soit w une fonction de poids sur I . Si il existe $a > 0$ tel que: $\int_I e^{a|x|} w(x) dx < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à w forment une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

III Approximation de fonctions périodiques

1) Séries de Fourier [ELAR2]

Déf 26: On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.

On note $L_{2\pi}^p$ l'espace des classes de fonctions 2π -périodiques et dans L^p muni de $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

Def 27: $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de $L_{2\pi}$ défini par $e_n(x) = e^{in \cdot x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Prop 28: La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale de $L_{2\pi}^2$ appelé système trigonométrique.

Def 29: Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par:
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-in \cdot x} dx$$

Def 30: Soit $f \in L_{2\pi}^1$. On définit les coefficients de Fourier réels de f : $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Prop 31: On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Def 32: Soit $f \in L_{2\pi}^1$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in \cdot x}$. On note $S_N(f)$: $x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in \cdot x}$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f .

2) Convergence au sens de Cesàro [ELA2]

Def 33: Soit $f \in L_{2\pi}$. On note $\sigma_N(f)$ la N -ième somme de Cesàro de la série de Fourier de f :
$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{h=0}^N S_h(f).$$

Théorème 34 (de Fejér): Si $f \in L_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\sigma_N(f)$ cvu vers f . DEV 2

Corollaire 35: 1) Soit $f \in L_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors si la suite $(S_N(f)(x_0))_N$ converge vers l , alors $l = f(x_0)$.

2) Si $f \in L_{2\pi}$ et si $(S_N(f))_N$ cvu dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n(x).$$

Corollaire 36: Si $f, g \in C_{2\pi}$ et si $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 37 (de Weierstrass trigonométrique): Toute fonction de $L_{2\pi}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

3) Convergence en moyenne quadratique [ELA2]

Prop 38: La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}$. Théorème 39 (Parseval): Soit $f \in L_{2\pi}^2$. Alors:

1) $(S_N(f))_N$ cv vers f en moyenne quadratique, c'éd:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0, \text{ c'éd } f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L_{2\pi}^2$$

$$2) \text{ On a : } \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

4) Convergence ponctuelle et normale [ELA2] [GOV]

Théorème 40 (de Dirichlet): Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existent, ainsi que $f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+)$

Alors: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

Corollaire 41: Si f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Application 42: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique tel que $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \quad \forall x \in [-\pi; \pi]$. En étudiant sa série de Fourier, on en déduit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Théorème 43: Si $f \in L_{2\pi}$ et est C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.