36 Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I. Généralités

1. Espaces vectoriels normés [GOU] [LI]
   Norme + exemples, EVN + exemples, normes équivalentes
2. Applications linéaires continues [GOU]
   Equivalences pour prouver la continuité, contre-exemple, norme subordonnée + prop avec la composition

II. Cas de la dimension finie [GOU] [IP]

DEV 1 : équivalence des normes en dimension finie

Tous les corollaires avec des exemples et contre-exemples, DEV 1 : théorème de Riesz

III. Complétude

1. Espaces de Banach [GOU]
   Banach, exemples($\mathcal{L}_c(E, F)$, dual topologique, fonctions bornées, fct continues sur un compact), théorème de Riesz-Fisher, toute série ACV est CV
2. Espaces de Hilbert [LI] [BMP]
   Espace de Hilbert, identité du paralélogramme
   DEV 2 : Projection sur un convexe fermé + corollaire sur P_C
   Projection sur un SEV fermé, théorème de représentation de Riesz, adjoint, gradient

Présentation :

- Les premières fonctions rencontrées dans la scolarité sont les fonctions linéaires, qui sont des cas particuliers des applications linéaires. Pour les étudier, il faut que l'espace de départ et d'arrivée aient un 0, soient stables par addition et stables par multiplication par un scalaire. C'est pour cette raison que l'on s'intéresse ici aux espaces vectoriels.
- L'équivalence des normes en dimension finie est cruciale, car permet de montrer que tous les EVN de dim finie sont complets pour n'importe quelle norme. Et la complétude est extrêment importante en analyse. Un exemple d'application est que l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice.

Développements :

- Equivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz
  - Analyse, Gourdon, p51
  - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p422
- Théorème de projection sur un convexe fermé + corollaire sur P_C
  - Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI, p32

Références :

- [GOU] Analyse, Gourdon
- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel sur K.

I Généralités

1) Espaces vectoriels normés [G] [Li]

GOU 7 **Déf 1 :** Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ tel que :

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparabilité)
2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ (homogénéité)
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Ex 2 : • $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$
• $\forall \alpha \geq 1$, $\|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Déf 3 : On dit que E est un K-ev normé s'il est muni d'une norme.

Li 6 **Ex 4 :** L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applis bornées d'un ens X dans E est un EVN muni de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$

Ex 5 : Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, alors $L^p(\mu)$ est un EVN muni de $\|f\|_p = \left(\int_X |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{1/p}$ pour $p \geq 1$.

GOU 47 **Déf 6 :** Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont dites équivalentes si : $\exists a, b > 0$ tq $\forall x \in E$,
$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b.\|x\|_1$

Rem 7 : Deux normes équivalentes définissent des distances équivalentes. Ainsi sur un plan topologique, il est indifférent de prendre l'une ou l'autre de ces normes.

2) Applications linéaires continues [G]

Soit F un K-EVN

Notation 8 : On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applis linéaires de E dans F. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applis linéaires continues de E dans F. GOU 48

Théorème 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre :
1) f est continue sur E
2) f est continue en 0
3) $\exists M > 0$ tq $\|f(x)\|_F \leq M.\|x\|_E \quad \forall x \in E$
4) f est lipschitzienne
5) f est uniformément continue

Rem 10 : la continuité dépend de la norme. Par exemple : Li 19

$\delta_0 : \mathcal{C}([0;1]) \to K$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|.\|_\infty$ mais pas pour $\|.\|_1$

Déf 11 : $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un EVN muni de la norme : GOU 48

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad |||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On l'appelle norme subordonnée.

Rem 12 : Le réel $|||f|||$ est le + petit réel positif m tq $\|f(x)\|_F \leq m.\|x\|_E \quad \forall x \in E$. Ainsi $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$

Prop 13 : Soit G un EVN. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$
Ainsi la norme subordonnée est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$.

Prop 14 : Une forme linéaire f sur E (càd $f \in \mathcal{L}(E, K) = E^*$) est continue (càd $f \in \mathcal{L}_c(E, K) = E'$) si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}\, f$ est fermé. GOU 48

II Cas de la dimension finie [G] [IP]

On suppose ici que E est de dimension finie.

GOU 50 **Théorème 15 :** Dans un EVN de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. DEV 1 a)

IP 426 **Contre-ex 16 :** c'est faux en dim infinie. Par exemple prendre $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(0, 1-nx)$ (fct triangle) avec les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$

GOU 50 **Corollaire 17 :** Toute application linéaire d'un EVN de dim finie dans un EVN quelconque est continue.

Contre-ex 18 : Faux en dim infinie. Prendre $E = \mathbb{R}[x]$ muni de $\|P\|_\infty = \sup |a_k|$. Alors $P \mapsto P'$ est linéaire mais pas continue (prendre x^n)

Corollaire 19 : Tout EVN de dimension finie est complet

Corollaire 20 : Tout SEV de dimension finie d'un EVN est fermé.

GOM 760 **Exemple 21 :** L'exponentielle matricielle est un polynôme en la matrice : $e^A \in K[A]$.

Corollaire 22 : Les parties compactes d'un EVN de dim finie sont les fermés-bornés.

Ø **Ex 23 :** $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Ø **Contre-ex 24 :** Faux en dim infinie. Prendre $E = \mathbb{R}[x]$ muni de $\|P\|_\infty = \sup|a_k|$. Alors $\mathcal{B} = \{P \in E \,;\, \|P\|_\infty \leq 1\}$ est fermée-bornée. Mais si on prend $P_n = x^n$ alors $P_n \in \mathcal{B}$ mais $\forall n \neq m$, $\|P_m - P_n\|_\infty = 1$ donc pas de sous-suite CV.

On a en fait un résultat général :

IP 425 **Théorème 25 (théorème de Riesz) :** Un EVN est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte. DEV 1 b)

IP 428 **Appli 26 :** Si E est un EVN de dim infinie, alors tout compact de E est d'intérieur vide.

III Complétude

1) Espaces de Banach [G]

GOU 20 **Déf 27 :** Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Un EVN complet est appelé espace de Banach.

GOU 50 **Ex 28 :** Tout EVN de dim finie est un espace de Banach.

Ø **Prop 29 :** Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes sur E. Alors $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach ssi $(E, \|.\|')$ en est un.

GOU 48 **Prop 30 :** Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Appli 31 : Le dual topologique E' de E est un espace de Banach.

GOU 21 **Ex 32 :** Si E est un Banach, alors $\mathcal{B}(X, E)$ est un espace de Banach

Li 10 **Ex 33 :** Soit X un compact de $\mathbb{R}$. Alors l'EVN $(\mathcal{C}(X, K), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Théorème 34 (théorème de Riesz-Fisher) : Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Alors $L^p(\mu)$ muni de $\|.\|_p$ est un espace de Banach.

GOU 52 Prop 35 : Un EVN est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

GOU 49 Prop 36 : Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$, tq $|||u||| < 1$. Alors $id - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

GOU 50 Appli 37 : L'exponentielle matricielle est bien définie.

2) Espaces de Hilbert [Li][BMP]

Li 31 Déf 38 : Un $\mathbb{K}$-ev H est un espace de Hilbert s'il est muni d'un produit scalaire et est complet pour la norme associée.

Exemples 39 :
- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
- $L^2(\mu)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t)$ est un Hilbert

Lemme 40 (identité du parallélogramme) : pour tous $u, v \in H$ on a : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Théorème 41 (projection sur un convexe fermé) : Soit H un Hilbert et C une partie convexe et fermée, non vide, de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tq :
$\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$
On dit que $y = \pi_C(x)$ est la projection de x sur C.
Il est caractérisé par la propriété :
$y \in C$ et $\mathrm{Re}(\langle x-y ; z-y \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C$

DEV 2

Corollaire 42 : L'application $\pi_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne

Théorème 43 : Si F est un SEV fermé de l'espace de Hilbert H, alors l'application $\pi_F : H \to F$ est une application linéaire continue. De plus, $\pi_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Li 35

Corollaire 44 : Si H est un Hilbert, pour tout SEV F fermé on a : $H = F \oplus F^\perp$

Corollaire 45 : pour tout SEV F de H un Hilbert, on a que : $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$

Corollaire 46 : Soit H un Hilbert et F SEV de H.
Alors : $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$

Théorème 47 (de représentation de Riesz) : Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $\Phi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\Phi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$. Li 38
De plus : $|||\Phi||| = \|y\|$

Application 48 : Soit H un Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$, appelé l'adjoint de T, tel que : $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$
De plus : $|||T^*||| = |||T|||$.

Application 49 : Soit H un Hilbert. Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in H$. Alors $df(a)$ est une forme linéaire continue sur H. Ainsi il existe un unique vecteur de H, noté $\nabla f(a)$ tel que BMP 5
$df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in H$.
On l'appelle gradient de f en a.