

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. [App]

I Définitions et modélisation

I.1 Définitions et propriétés

Déf 1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que X est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.

Notation 2. Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$, on note :

1. $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\})$.
2. $\{X \in A\} := X^{-1}(A)$

La probabilité associée à ces éléments sera notée $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \in A)$.

Déf 3. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle loi de X l'application $\mathbb{P}_X$ définie sur la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens par : $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$, $A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$. On note $X \sim \mathbb{P}_X$.

Prop 4. Soit X une variable aléatoire discrète. Notons $X(\Omega) = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Alors pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x_k \in A} \mathbb{P}(X = x_k)$.

Rq 5. La loi d'une variables aléatoire discrète est alors entièrement déterminée par $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x_k)$, pour tout $x_k \in X(\Omega)$.

- Ex 6.**
1. Soit $x \in \Omega$. On définit la mesure de Dirac associée au point $x \in \mathbb{R}$ par : $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Si $\mathbb{P}(X = x) = 1$, $X \sim \delta_x$.
 2. Soit $p \in [0, 1]$. On appelle loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(p)$, la loi $\mu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$. On dit que X suit une loi de Bernoulli si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
 3. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$, noté $\mathcal{B}(n, p)$, si pour tout $k \in [0, n]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
 4. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$, si $\mathbb{P}(X = k) = p(p - 1)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Déf 7. Soit X une variable aléatoire réelle. Sa fonction de répartition est l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$.

Ex 8. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - p & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

Prop 9. Soit $B \in \mathcal{F}$, la fonction indicatrice de B , notée $\mathbb{1}_B$, est une la variable aléatoire définie par : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. De plus, $\mathbb{1}_B \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}(B)$.

Ex 10. Soit Y une variable aléatoire réelle. Soit $X = \mathbb{1}_{Y \geq 0}$, alors $X \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(Y \geq 0))$.

Prop 11. Soient $A, B \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et $1 - \mathbb{1}_{A \cup B} = (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B)$. Il en découle que le produit et la somme de deux variables de Bernoulli, est une variable de Bernoulli.

Déf 12. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. On dit que X admet une espérance si $\sum_{n \geq 0} |x_k| \mathbb{P}(X = x_k)$ converge. Dans ce cas, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X , la somme $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$.

- Ex 13.**
1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$.
 2. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Prop 14. Si X est une variable aléatoire discrète, $X(\Omega) = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Alors $X = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \mathbb{1}_{\{X=x_k\}}$. Réciproquement, s'il existe $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ et une partition de $\Omega : (A_k)_k \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, telle que $X = \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors X est une variable aléatoire discrète.

App 15. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha X + \beta Y$ est une variable discrète. De plus, si X et Y admettent une espérance, alors $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$. Enfin, si $X = \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \mathbb{P}(A_k)$.

Thm 16 (Formule de Transfert). Soient X une variable aléatoire discrète et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire discrète.

De plus, $\varphi(X)$ admet une espérance, si et seulement si, $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi(x_k)| \mathbb{P}(X = x_k)$ converge. Et dans ce cas, $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_k) \mathbb{P}(X = x_k)$.

Ex 17. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $Y = \frac{1}{X}$. Alors $\mathbb{E}(Y) = -\frac{p \ln p}{1-p}$.

Déf 18. Soit X une variable aléatoire discrète. si X^2 admet une espérance, on dit que X admet une variance, et l'on note $Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Prop 19 (König-Huygens). Si X admet une variance, alors $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Ex 20. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Var(X) = p(1-p)$.

Thm 21. Soit $p \in]0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes. Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Prop 22. Soient $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

I.2 Modélisation

Ex 23. On peut modéliser un tirage à pile ou face par une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(p)$. Si l'on note A l'évènement "la pièce fait pile", et B l'évènement "la pièce fait face", et p la probabilité que la pile fasse face, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p$, et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Si la pièce n'est pas pipée, $p = \frac{1}{2}$.

Ex 24. On souhaite modéliser une loi caractérisant le nombre de de piles obtenus avant le premier face. Soit Y une variable aléatoire comptant le nombre de pile. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = (1-p)^n p$. Y suit une loi similaire à une loi géométrique, sauf que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et non $\mathbb{N}^*$. On notera cette loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$.

Ex 25 (Problème des chapeaux). Soit $n \geq 1$ hommes qui souhaitent récupérer leurs chapeaux. On suppose que chaque chapeau est remis de manière aléatoire à chaque homme, et on souhaite savoir en moyenne combien de chapeaux seront remis.

On pose $\Omega = \mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations à n éléments, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$, pour tout $\sigma \in \Omega$. On considère la variable aléatoire : $\forall \sigma \in \Omega$,

$X(\sigma) = |\{1 \leq k \leq n : \sigma(k) = k\}| = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(\sigma)$, où $A_k = \{\sigma : \sigma(k) = k\}$. Alors puisque pour tout k $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$.

II Un exemple : la loi de Poisson

Déf 26. Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Prop 27. Il s'agit bien d'une loi.

Prop 28. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$.

Prop 29. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

App 30 (DEV 1). [GK19] Supposons $(X_n)_n$ indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. Soit $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. (a) $\mathbb{P}(X_n \neq 1 \text{ pour une infinité de } n) = 1$.

(b) Soit $p = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_n})$. Alors :

$$Y_n \xrightarrow{ps} \begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité de } 1-p \\ +\infty & \text{avec une probabilité de } p \end{cases}$$

(c) Si $\lambda_n = o(\ln(n))$, $p = 0$. Si $\lambda_n = 2 \ln(1+n)$, $p = \frac{1}{2}$.

2. (a) Si $\sum_{n \geq 1} \lambda_n^k$ converge, alors $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} X_n \leq k - 1$ ps.

(b) Les valeurs d'adhérence de $(X_n)_n$, si $\lambda_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$, sont $\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\}$.

Thm 31 (limite d'épreuves de Bernouilli). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(p_n)$, où $(p_n)_{n \geq 1} \in]0, 1[\mathbb{N}^*$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$.

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

III Fonction génératrice

III.1 Propriétés et caractérisations

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Déf 32. On appelle fonction génératrice de X , notée G_X , la somme de série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$

Prop 33. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t^n \mathbb{P}(X = n)$. Alors pour tout $t \in]-R, R[$, G_X est bien définie, et $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(t^X)$.

Ex 34. 1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ pour tout $-\frac{1}{1-p} \leq t < \frac{1}{1-p}$.

3. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Prop 35. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} t^n \mathbb{P}(X = n)$.

1. $R \geq 1$
2. G_X est bien définie sur $[-R, R]$. $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.
3. $G_X(1) = 1$. De plus, $G_X([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ et G_X est strictement croissante et convexe sur $[0, 1]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$, autrement dit, la fonction génératrice caractérise la loi.

Prop 36. Si $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$. Plus généralement, si $X \in L^p(\mathbb{P})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-p+1))$

Prop 37. Si X et Y sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

III.2 Processus de Galton-Watson

Thm 38 (Identité de Wald - DEV 2). Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes de même loi que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, et N

une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante avec tous les X_k . Notons $S(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$, avec $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$. Alors :

1. Pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$.
2. Si de plus X et N admettent une espérance, alors S admet une espérance, et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$.

App 39 (DEV 2 - Processus de Galton-Watson). Etant donnée X une variable aléatoire discrète sur $\mathbb{N}$, on note $\forall k \in \mathbb{N}$. $(X_i^n)_{n \geq 0, i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, de même loi que X et $\forall n \geq 0, \forall i \geq 1, X_i^n \in L^2$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n le nombre d'individus au temps n . Elle suit la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} Z_0 &= 1 \\ Z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n \end{cases}$$

, $m = \mathbb{E}(X)$, $(x_n)_n$ la suite définie par $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. l'évènement M : "la population finit par s'éteindre".

Alors $(x_n)_n$ converge vers le plus petit point fixe de G_X . De plus, si $m < 1$, $\mathbb{P}(M) = 0$, si $m = 1$, $\mathbb{P}(M) = 1$, et si $m > 1$, $\mathbb{P}(M) \in]0, 1[$.

Prop 40. $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, si $m < 1$, la population moyenne tend rapidement vers 0. Si $m = 1$, la population moyenne reste constante. Si $m > 1$, la population moyenne tend rapidement vers $+\infty$.

Bibliographie

- [App] Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. 3ème édition. HK.
- [GK19] Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*, 2è édition. ellipse, 2019.