

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

I Stone Weierstrass et conséquences

Stone Weierstrass nous donne des résultats théoriques de densité qu'on va énoncer. On cherchera ensuite à chercher des manières constructives de voir comment approximer nos fonctions.

[Ber17] [Li] Soit K un compacte de (X, d) .

Thm 1 (Bernstein). Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. La suite $(B_n(f))_n$ définie par $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$, converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

Thm 2 (Weierstrass). Soient $b > a \in \mathbb{R}$. Toute fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes est limite uniforme d'une suite de polynôme.

Thm 3 (Stone-Weierstrass - DEV 1). [Li] Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$. Si :

1. $\mathcal{A}$ sépare les points : $\forall x, y \in K, \exists f \in \mathcal{A}, f(x) \neq f(y)$.
2. $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

C-ex 4. L'hypothèse "contenir les constantes" permet d'éliminer le cas de l'algèbre $\mathcal{A}_x := \{f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = 0\}$ pour un certain $x \in K$.

App 5. Soit K un compacte de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Alors toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$ est limite uniforme suite d'une suite de polynôme à n variables $(P_k)_k$.

App 6. Soit A une partie dénombrable de (K, d) . L'algèbre engendrée par $x \mapsto 1$ et les fonctions $x \mapsto d(a, x)$, $a \in A$, est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Il en résulte que $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

Thm 7 (Stone-Weierstrass complexe). Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. Si :

1. $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison : $\forall f \in \mathcal{A}, \bar{f} \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ sépare les points : $\forall x, y \in K, \exists f \in \mathcal{A}, f(x) \neq f(y)$.
3. $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 8. Soit $(e_n)_n$ la suite de fonctions définie par $x \mapsto e^{inx}$. Alors l'ensemble des polynômes trigonométriques, $\text{Vect}_{\mathbb{C}}((e_n)_n)$, est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

II Fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$

[Li]

Déf 9. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que le produit de convolution de f et g en $x \in \mathbb{R}$ existe si la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On pose alors $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$.

Prop 10. $f * g$ existe, si et seulement si, $g * f$ existe. De plus, $f * g = g * f$.

Thm 11. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f * g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus, $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Prop 12. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans L^p .

Cor 13. L^p est séparable pour $p < +\infty$.

Thm 14. Soient $f, g \in L^1$. Alors $f * g(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et $f * g \in L^1$. De plus, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Prop 15. L^1 est une algèbre de Banach commutative pour la convolution

Déf 16. On appelle densité de probabilité toute fonction $P \in L^1$ telle que $0 \leq P(x) \leq 1$ ppx et $\int_{\mathbb{R}} P(x)dx = 1$.

Thm 17. Soient P une densité de probabilité et $\varepsilon > 0$. On pose $P_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} P\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Pour tout $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g * P_\varepsilon)(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour $1 \leq p < +\infty$, pour tout $f \in L^p$, alors $f * P_\varepsilon \in L^p$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - f * P_\varepsilon\|_p = 0$

De plus, si $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est uniformément continue, alors la convergence de $g * P_\varepsilon$ vers g est uniforme.

Déf 18. On appelle approximation de l'unité, toute fonction $P_\varepsilon \in L^1$, indexée par $\varepsilon > 0$, telles que $\int_{\mathbb{R}} P_\varepsilon(t)dt = 1$, et vérifiant les condition 1) et 2) du thm précédent.

Ex 19. [El 08] Noyau de Gauss : $\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$

App 20 (DEV 2 - Inversion de Fourier). Soit $f \in L^1$. On définit la transformée de Fourier de f pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$. Si $\widehat{f} \in L^1$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

Thm 21. Si $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, et $\varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. De plus, $(f * \varphi)^{(h)} = f * \varphi^{(h)}$ pour $0 \leq h \leq k$.

Ex 22. Soit $\sigma(u) = e^{-\frac{1}{1-u^2}}$ si $|u| < 1$, $\sigma(u) = 0$ si $|u| \geq 1$. Alors $\sigma \in \mathcal{C}^\infty$ et soit $A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u) du$. On pose $P(t) = e^{-\frac{1}{1-A^2t^2}}$ si $|t| < \frac{1}{A}$, et 0 sinon. Pour $f \in L^p$, $f * P_\varepsilon \in L^p \cap \mathcal{C}^\infty$ et $\|f - f * P_\varepsilon\|_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Thm 23. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L^p .

App 24 (Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1$. Alors $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

III Polynômes algébriques

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Thm 25 (Taylor-Young). Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en $a \in I$, elle admet alors, au voisinage de a , le développement limité d'ordre n en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Déf 26. Supposons $0 \in I$. On dit que f est développable en série entière en 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, et un nombre $r \in]0, R[$ avec $] -r, r[\subseteq I$ tel que : $\forall x \in] -r, r[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Déf 27. On dit que f est développable en série entière en $x_0 \in I$ si $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière en 0.

Ex 28. Toute fonction polynomiale P est développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Prop 29. Si f est développable en série entière en x_0 , alors il existe un voisinage ouvert de x_0 sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement en série entière de f est $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Thm 30. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert I de 0, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, si et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $] -r, r[\subseteq I$ et la suite de fonctions $(R_n)_n$ définie par : $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, converge simplement vers 0 sur $] -r, r[$, et le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à r .

Ex 31. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.
5. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

IV Polynômes trigonométriques

Déf 32. On définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite de fonctions $e_n(x) = e^{inx}$. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie des $(e_n)_n$.

Prop 33. La famille $(e_n)_n$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Thm 34. Pour toute fonction f continue 2π -périodique, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

Cor 35. $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$

Déf 36. Soit $f \in L_{2\pi}^1$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $S(f)(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$. On note $S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ sa somme partielle d'ordre N .

Ex 37. La fonction φ 2π -périodique définie par $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$, pour $x \in]-\pi, \pi[$ et $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, admet pour développement en série de Fourier :

$$(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{e^{inx}}{z - 2i\pi n}$$

Rq 38. On se pose alors les questions suivantes : pour quelles fonctions f $(S_N(f))_N$ converge ? Et pour quelle conditions supplémentaires on a convergence vers f ? Et si convergence il y a, quel type de convergence ?

Thm 39. Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Si $S_N = \sum_{n=-N}^N u_n e^{in \cdot}$ converge vers f dans $L_{2\pi}^1$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = c_n(f)$.

Thm 40 (Parseval). Soit $f \in L_{2\pi}^2$, alors :

1. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.
2. $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Prop 41. Soient $f \in L_{2\pi}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = s \in \mathbb{C}$, si et seulement si, il existe $\delta \in]0, \pi]$ tel que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} - s \right) D_N(t) dt = 0$.

Thm 42 (Féjer). 1. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

2. Soit $f \in L_{2\pi}^p$, $p \in [1, +\infty[$, alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

Cor 43. l'ensemble des polynômes trigonométriques est dans dans $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$.

Cor 44. Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors si $(S_N(f)(x_0))_N$ converge en valeur principale de Cauchy, $S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x_0)$. Si de plus, $(S_N(f))_N$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f = S(f)$.

Thm 45. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_{pm}^1$, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on a $f = S(f)$.

Thm 46 (Dirichlet). Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent. Et que f admet une dérivée à

gauche, et à droite en x_0 . Alors si l'on note $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

App 47. Pour tout $k \geq 1$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2n)!} b_{2k}$, où on définit les nombres de Bernouilli b_n comme étant les coefficients tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^{2k}$, avec $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

Thm 48 (Abel-Poisson). Soit $f \in \mathcal{C}_{pm, 2\pi}$. Pour tout élément $r \in]0, 1[$, la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n}) r^n$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$.

De plus, si on note f_r sa somme, alors :

1. f_r converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$ lorsque r tend vers 1^-
2. Si en plus f est continue, alors la convergence est uniforme et $f = \widehat{f}$

Cor 49. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, alors $f(x) = S(f)$, et sa série de Fourier converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Bibliographie

- [Ber17] François BERTELOOT. *Cinq leçons d'analyse fonctionnelle*. ellipses, 2017.
- [El 08] Mohammed EL AMARANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [Li] Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*.