

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilité

I Lois de variables aléatoires

I.1 Définitions et caractérisations

[App] [GK19]

Déf 1. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle loi de X l'application $\mathbb{P}_X$ définie sur la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens par : $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$, $B \mapsto \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$. On note $X \sim \mathbb{P}_X$.

Ex 2. Soit $x \in \Omega$. On définit la mesure de Dirac associée au point $x \in \mathbb{R}$ par : $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Alors si X est une variable aléatoire constantes égale à x , $\mathbb{P}_X = \delta_x$.

Ex 3. Soit $p \in [0, 1]$. On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$. On dit que X suit une loi de Bernoulli si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Prop 4. Si X est une variable aléatoire, alors $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Déf 5. Soit X une variable aléatoire réelle, on dit que X admet une espérance si X est $\mathbb{P}$ -intégrable sur Ω . Dans ce cas, on appelle espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, la valeur $\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

Thm 6 (Théorème de transfert). Soient X une variable aléatoire, de loi $\mathbb{P}_X$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors $\varphi(X) = \varphi \circ X$ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}$, si et seulement si, φ l'est par rapport à $\mathbb{P}_X$. Si c'est le cas, l'espérance de $\varphi(X)$ s'écrit sous les deux formes suivantes :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx)$$

Ex 7. Si X suit une loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$, noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, c'est à dire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, alors $\mathbb{E}(X) = np$

Ex 8. $X \sim \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)dx}{1+x^2}$ n'admet pas d'espérance.

Ex 9. Soient $b > a$. On appelle loi uniforme, notée $\text{Unif}(a, b)$, la loi $\mu = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx$. Si $X \sim \text{Unif}(a, b)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(a+b)$.

Ex 10. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$, c'est à dire que $\mathbb{P}(X = k) = p(p-1)^k$, pour tout $k \geq 1$. Alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Déf 11. On dit que X admet une variance si X^2 est intégrable sur Ω . Dans ce cas, on appelle variance de X le réel positif $\text{Var}(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Prop 12. $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Thm 13 (Technique de la fonction test). Une variable aléatoire réelle X suit la loi μ sur $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x)$.

Ex 14. Soit $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$ et soit $Y = \max(0, X)$. Alors $Y \sim \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$.

I.2 Indépendance

[App]

Déf 15. $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires est dite indépendantes si pour toute partie finie $J \subseteq I$, pour tout $(B_j)_{j \in J} \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}) =$

$$\prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$$

Thm 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications mesurables. Alors $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ et $\psi(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Thm 17. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurables, $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$

Cor 18. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Thm 19. Soit $p \in]0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes. Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Prop 20. Soient $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

II Caractérisation

[App]

II.1 Fonction de répartition

Déf 21. Soit X une variable aléatoire réelle, on définit sa fonction de répartition F_X par la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$.

Ex 22. Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\varepsilon(\lambda)$, c'est à dire que $\mathbb{P}_X = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$. Alors $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Thm 23. Deux variables aléatoires ont même loi, si et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

Ex 24. Soit $\Omega = [0, 1]$, $X, Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et $Y(\omega) = X(2\omega) = \cos(2\pi\omega)$. Alors X et Y ont même loi.

Prop 25. Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. F_X est continue à droite.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

II.2 Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Déf 26. On appelle fonction génératrice de X , notée G_X , la somme de série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) t^n$

Prop 27. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t^n \mathbb{P}(X = n)$. Alors pour tout $t \in]-R, R[$, G_X est bien définie, et $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(t^X)$.

Ex 28. 1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$ pour tout $-\frac{1}{1 - p} \leq t < \frac{1}{1 - p}$.

Prop 29. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} t^n \mathbb{P}(X = n)$.

1. $R \geq 1$
2. G_X est bien définie sur $[-R, R]$. $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.
3. $G_X(1) = 1$. De plus, $G_X([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ et G_X est strictement croissante et convexe sur $[0, 1]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$, autrement dit, la fonction génératrice caractérise la loi.

Prop 30. Si $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$. Plus généralement, si $X \in L^p(\mathbb{P})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}(X(X - 1) \dots (X - k + 1))$

Prop 31. Si X et Y sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.3 Fonctions caractéristiques

Déf 32. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{itX}$ est intégrable. On définit alors la fonction caractéristique sur $\mathbb{R}$ de X par : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Rq 33. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\varphi_X(t) = G_X(e^{it})$.

Ex 34. 1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.

2. Si $X \sim \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) dx}{\pi(1 + x^2)}$, alors $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

Prop 35. Soient $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$.

Ex 36. Si X suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, m)$, c'est à dire $X \sim \frac{a}{\pi} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) dx}{a^2 + (x - m)^2}$, alors $\varphi_X(t) = e^{itm} e^{-a|t|}$.

Prop 37. Si X et Y sont indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Thm 38. Deux variables aléatoires ont même loi, si et seulement si, elles ont même fonctions caractéristiques.

Prop 39. Si $X \in L^p(\mathbb{P})$, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^p$, et pour tout $1 \leq l \leq p$, $\varphi_X^{(l)}(t) = i^l \mathbb{E}(X^l e^{itX})$. Entre autre, $\varphi_X^{(l)}(0) = i^l \mathbb{E}(X^l)$.

III Exemples de lois

III.1 Loi de Poisson

Déf 40. Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Prop 41. Il s'agit bien d'une loi.

Prop 42 (Formulaire de calcul). Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

Prop 43. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

App 44 (DEV 1). Supposons $(X_n)_n$ indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. Soit $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. (a) $\mathbb{P}(X_n \neq 1 \text{ pour une infinité de } n) = 1$.

(b) Soit $p = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_k})$. Alors :

$$Y_n \xrightarrow{ps} \begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité de } 1 - p \\ +\infty & \text{avec une probabilité de } p \end{cases}$$

(c) Si $\lambda_n = o(\ln(n))$, $p = 0$. Si $\lambda_n = 2 \ln(1 + n)$, $p = \frac{1}{2}$.

2. (a) Si $\sum_{n \geq 1} \lambda_n^k$ converge, alors $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} X_n \leq k - 1$ ps.

(b) Les valeurs d'adhérence de $(X_n)_n$, si $\lambda_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$, sont $\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\}$.

III.2 Loi Normale

Prop 45. Soient $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$. $\mu_{m, \sigma^2} = \frac{1_{\mathbb{R}}(x)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$ est une loi de probabilité.

Déf 46. On dit X suit une loi normale de paramètre m et σ^2 , notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si $X \sim \mu_{m, \sigma^2}$.

Prop 47 (Formulaire de calcul). Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors $\mathbb{E}(X) = m$, $Var(X) = \sigma^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

IV Convergence en loi

[App]

Déf 48. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ convergence en loi vers X si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X)$$

On écrit alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Rq 49. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \not\Rightarrow X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prop 50. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, et si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

Rq 51. En général, la convergence en loi n'implique pas la convergence en proba.

Thm 52. Soit F_{X_n} la fonction de répartition de X_n , et F_X celle de X . Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X si, et seulement si, la suite $(F_{X_n})_{n \geq 1}$ converge simplement vers F_X en tout point de continuité de F .

Ex 53. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes, de même loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On note $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$, et $Y_n = n(1 - M_n)$. Alors $(Y_n)_n$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

Thm 54 (Paul-Lévy). On a équivalence entre :

i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

ii) $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X

Prop 55. Si X est une variable aléatoire égale presque partout à une constante a , alors :

$$(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X) \implies (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X).$$

Thm 56 (limite d'épreuves de Bernouilli). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(p_n)$, où $(p_n)_{n \geq 1} \in]0, 1[\stackrel{\mathbb{N}^*}{\text{telle que}} np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$.

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Thm 57 (Théorème centrale limite **DEV 1**). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, telle que $\mathbb{E}|X_1|^2 < +\infty$, admettant une variance $\sigma^2 > 0$. Alors :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma)$$

C-ex 58. Sans l'hypothèse $\mathbb{E}(|X_1|^2) < +\infty$, le théorème est faux : considérer $(X_n)_n$ i.i.d. de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

App 59 (Théorème de Moivre-Laplace **DEV 1**). Soient $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

App 60 (Formule de Stirling). $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Bibliographie

- [App] Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. 3ème édition. HK.
- [GK19] Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*, 2è édition. ellipse, 2019.