

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Prérequis

[Li] Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, réel ou complexe.

Prop 1. L'application $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ définie une norme sur H . On l'appelle norme associée au produit scalaire de H .

Cor 2. Soit $y \in H$. L'application $\Phi_y : \begin{cases} H & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{cases}$ est une forme linéaire continue, de norme subordonnée $\|\Phi_y\| = \|y\|$.

Déf 3. On dit que $x, y \in H$ sont orthogonaux, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$. Soit A une partie de H , on note $A^\perp = \{y \in H : \forall x \in A, x \perp y\}$.

Prop 4. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Déf 5. Si l'espace préhilbertien H est complet pour la norme associée à son produit scalaire, on l'appelle espace de Hilbert.

Ex 6. Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Ex 7 (DEV 1). Soit $l^2 = \{u := (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$. Alors l^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, $u, v \in l^2$.

Ex 8. $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, pour la norme $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$, $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

II Théorie hilbertienne

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $\|\cdot\|$ sa norme associée.

II.1 Théorème de projection sur un convexe fermé

[Li]

C-ex 9. [El 08]

- Pour $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $F = \{(1 + \frac{1}{n})e_n : n \in \mathbb{N}\}$. F est fermé et $d(0, F)$ n'est pas atteinte.
- Pour $H = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1$ est fermé et $d(0, \mathbb{S}^1)$ est atteinte en tout point de $\mathbb{S}^1$.

Lemme 10 (Identité du parallélogramme). Pour tout $x, y \in H$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Thm 11 (Théorème de projection sur un convexe fermé). Soit H un espace de Hilbert, et C une partie convexe fermée, non vide, de H . Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que pour tout $x \in H$, $\|x - y\| = d(x, C) := \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

On dit que $y =: p_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par les propriétés :

$$p_C(x) \in C \text{ et } \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle) \leq 0, \forall z \in C.$$

Rq 12. Dans le cas réel, l'inégalité dans la caractérisation signifie que l'angle $(x - p_C(x), z - p_C(x))$ est obtus.

Prop 13. L'application $p_C : H \rightarrow C$ est continue (et même 1-lipschitzienne).

Thm 14. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $p_F : H \rightarrow F$ est une application linéaire, continue, et $p_F(x)$ est l'unique point de F tel que :

$$p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp.$$

Prop 15. Si F est un sev fermé de H non réduit à 0, alors $\|p_F\| = 1$.

Thm 16. Soit H est un espace de Hilbert, alors pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H , $H = F \oplus F^\perp$, et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est p_F . On dit que p_F est la projection orthogonale sur F .

Cor 17. Pour tout sous-espace vectoriel F de H , $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Cor 18. Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H . Alors F est dense dans H , si et seulement si, $F^\perp = \{0\}$.

App 19. L'ensemble des fonction continues sur $\mathbb{R}$ à support compact, est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Il en découle que $\mathcal{C}([0, 1])$ est dense dans $L^2(0, 1)$.

II.2 Etude du dual de H

[Li]

Déf 20. Soit F un sous-espace vectoriel normé. On note $\mathcal{L}(H, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans F . On appelle dual de H l'ensemble $H^* := \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$.

Thm 21 (Théorème de représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire $\Phi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\Phi(x) = \langle x, y \rangle$, pour tout $x \in H$. Autrement dit, $H \simeq H^*$.

Prop 22. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que pour tout $x, y \in H$, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. On l'appelle opérateur adjoint de T .

Prop 23. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| = \|T^*\|$.

II.3 Bases hilbertiennes

[Li] On suppose H de dimension infinie.

Déf 24. On dit qu'un espace vectoriel normé X est séparable s'il existe une partie D de X , qui est dénombrable et dense dans X . On dit qu'une partie A de X est totale lorsque $\text{Vect}(A)$ est dense dans X .

Déf 25. On dit que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H si la famille $(e_n)_n$ est orthonormée et totale.

Ex 26. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Alors $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne de l^2 .

Rq 27. Si un espace de Hilbert admet une base hilbertienne, alors il est séparable.

Prop 28. Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H :

1. "Tout élément de $x \in H$ s'écrit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$, avec $\lambda_n = \langle x, e_n \rangle$.

2. (Formules de Parseval) Pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

3. Pour tout $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$.

Cor 29. Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H . Alors l'application linéaire $S : H \rightarrow l^2$, $x \mapsto ((x, e_n))_n$ est un isomorphisme conservant le produit scalaire.

Thm 30. Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Cor 31. Tous les espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie, sont isomorphes entre eux, et en particulier à l^2 .

Thm 32. $L^2(\mathbb{R})$ est séparable. Donc $L^2(\mathbb{R}) \simeq l^2$

II.4 Convergence faible

[El 08]

Déf 33. On dit que $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle$. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x$, on dit que $(x_n)_n$ converge fortement vers x .

Prop 34. Lorsqu'elle existe, la limite faible est unique.

Ex 35. Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H . Alors $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0.

Prop 36. Convergence forte implique convergence faible.

Prop 37. Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x , alors $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$.

Cor 38. $(x_n)_n$ converge fortement vers x , si et seulement si, $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et $\|x\| \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$.

Thm 39 (DEV 2 - Banach-Alaoglu (cas séparable)). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé séparable, et $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telles que

$$\forall x \in E, T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x)$$

Cor 40 (DEV 2). (Cas d'un Hilbert séparable) : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable, $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement.

Rq 41. Le résultat reste vrai si H n'est pas séparable.

III Application à l'analyse de Fourier

III.1 $L^2_{2\pi}$ et Séries de Fourier

Parler de polynômes trigonométriques qui forment une base hilbertienne

Déf 42. On note $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de L^p localement intégrables. On considère $L^p_{2\pi} = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$.

Rq 43. $L^2_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$.

Thm 44. $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

Déf 45. On définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite de fonctions $e_n(x) = e^{inx}$. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie des $(e_n)_n$.

Prop 46. La famille $(e_n)_n$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Thm 47. Pour toute fonction f continue 2π -périodique, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

Cor 48. $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

Déf 49. Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$. On appelle série de Fourier de f la série $S(f) : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Ex 50. La fonction φ 2π -périodique définie par $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$, pour $x \in]-\pi, \pi[$ et $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, admet pour développement en série de Fourier :

$$(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{e^{inx}}{z - 2i\pi n}$$

Thm 51 (Dirichlet). Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent. Et que f admet une dérivée à

gauche, et à droite en x_0 . Alors si l'on note $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

App 52. Pour tout $k \geq 1$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$, où on définit les nombres de Bernouilli b_n comme étant les coefficients tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^{2k}$, avec $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

III.2 transformées de Fourier dans L^2

Déf 53. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit la transformée de Fourier de f par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \in \mathbb{C}$.

Thm 54 (Formule de Plancherel-Parseval). Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Thm 55. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors :

1. Il existe une suite $(f_n)_n$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Pour une telle suite $(f_n)_n$, la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\tilde{f}$, ne dépendant que de f (donc pas de la suite choisie).

Déf 56. La limite $\tilde{f}$ définie ci-dessus est appelée transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Prop 57. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, si l'on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier dans L^1 , et $\tilde{f}$ sa transformée de Fourier dans L^2 , alors $\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \tilde{f}(\xi)$ pour presque tout ξ .

Prop 58 (Inversion dans L^2). Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Ex 59. En calculant pour $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(a\xi) \cos(x\xi)}{\xi} d\xi$. On montre que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.

Prop 60 (Dualité). Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}g$ et $f\widehat{g}$ sont dans L^1 , et $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g}(y) dy$

Bibliographie

- [El 08] Mohammed EL AMARANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [Li] Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*.