

Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie.
Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

$\mathbb{K}$ est un corps. E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I Généralités

I.1 Autour de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Déf 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les puissances de u sont les endomorphismes de E définis récursivement par $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par la relation $u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k$. Entre autre, pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$,

l'endomorphisme de E est défini par $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$.

Prop 2. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Thm 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\Phi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbre. Son image, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Déf 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Prop 5. Si E est de dimension finie, alors $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul.

C-ex 6. L'hypothèse de la dimension finie est nécessaire. En effet, l'application $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

Cor 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\text{Ker}(\Phi_u)$ est un idéal principal non réduit à 0 de $\mathbb{K}[X]$.

Déf 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme minimal de u , noté μ_u , l'unique polynôme unitaire engendrant $\text{Ker}(\Phi_u)$.

Cor 9. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a un isomorphisme d'algèbre : $\mathbb{K}[X]/(\mu_u) \simeq \mathbb{K}[u]$. Entre autre, $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \mu_u$.

App 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Alors, u est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Cor 11. $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, si et seulement si, $\mu_u(0) \neq 0$.

App 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur de degré $N \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u^m \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{N-1})$

Rq 13. Pour calculer explicitement u^m , il suffit d'effectuer des divisions euclidiennes de polynôme.

Ex 14. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts et $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme annulateur $(X - a)(X - b)$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u^m = \frac{a^m - b^m}{a - b} u + \frac{ba^m - ab^m}{b - a} \text{Id}_E$.

Thm 15. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. L'application $\Phi_{u,x} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(u)(x) \end{cases}$ est une application linéaire. Son noyau est un idéal principal non réduit à 0, et son image, notée $\mathbb{K}[u] \cdot x$, est un sous-espace vectoriel de E .

Déf 16. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On appelle polynôme minimal local en x de u , noté $\mu_{u,x}$, l'unique polynôme unitaire engendrant $\text{Ker}(\Phi_{u,x})$.

Prop 17. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, $\mathbb{K}[X]/(\mu_{u,x}) \simeq \mathbb{K}[u] \cdot x$. Entre autre, $\dim \text{Ker}[u] \cdot x = \deg \mu_{u,x}$.

I.2 Sous-espaces stables

Déf 18. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$. On note alors $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'induit de u à F .

Prop 19. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u . Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$

Prop 20. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .

Thm 21 (Lemme des noyaux). Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, de décomposition en facteurs irréductibles $P = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Alors $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)^{\alpha_i})$.

Cor 22. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, de décomposition en facteurs d'irréductibles $P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)^{\alpha_i})$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables par u .

Prop 23. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $(\text{Ker}(P(u)^k))_k$ est une suite strictement croissante puis stationnaire à partir d'un certain rang, au sens de l'inclusion. Si de plus P est irréductible, alors le polynôme local de u en $x \in \text{Ker}(P(u)^k) \setminus \text{Ker}(P(u)^{k-1})$ est P^k .

Cor 24 (DEV 2). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

I.3 Polynôme caractéristique

Déf 25. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base de E . On appelle polynôme caractéristique le polynôme $\chi_u = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$.

Rq 26. On vérifie que la définition du polynôme caractéristique de u est indépendante du choix de la base.

Prop 27. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u . Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Prop 28. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F et G deux sous-espaces de E stables par u , tels que $F \oplus G = E$. Alors $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$.

Prop 29. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de μ_u et χ_u sont exactement les valeurs propres de u .

Thm 30. Si E est $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors χ_u est scindé.

Déf 31. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . On appelle multiplicité algébrique de λ , notée m_λ , la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u . On appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ le sous espace $F_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.

Prop 32. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Alors $F_\lambda(u)$ est stable par u .

Déf 33. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E .

Prop 34. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Alors $\mu_u = \chi_u$.

Thm 35 (Théorème de Cayley-Hamilton). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est un polynôme annulateur de u . Entre autre, $\mu_u \mid \chi_u$.

Cor 36. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicités. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^r F_{\lambda_i}(u)$.

II Réduction

II.1 Classe de similitude

Déf 37. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On appelle classe de similitude de A l'ensemble des matrices semblables avec A .

Prop 38. La relation "être semblable avec" est une relation d'équivalence. Donc toute classe de similitude est une classe d'équivalence.

Déf 39. Une matrice A est diagonalisable, resp. trigonalisable, si elle admet une matrice diagonale, resp. triangulaire supérieure, dans sa classe de similitude.

Déf 40. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, resp. trigonalisable, s'il existe une base E telle que la matrice de u dans cette base est diagonale, resp. triangulaire supérieure.

Prop 41. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable, si et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. u est trigonalisable, si et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé.

Thm 42 (Décomposition de Dunford). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

1. $u = d + n$
2. d est diagonalisable
3. n est nilpotent
4. $d \circ n = n \circ d$

Entre autre, d et n sont des polynômes en u .

Prop 43. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la décomposition de Dunford de A est $D + N$, alors e^A admet une décomposition de Dunford qui est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

Thm 44 (DEV 1). Supposons que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé, de décomposition de Dunford $D + N$. On pose $P := \frac{\chi_A}{\chi'_A \wedge \chi_A}$ et on considère la suite $(A_r)_r$ définie par $A_0 = A$, et $A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$. Alors cette suite est bien définie, est stationnaire pour tout $r \geq \log_2(n)$, et tend vers D .

II.2 Invariants de similitudes

Prop 45. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même polynôme caractéristique.

C-ex 46. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.

Prop 47 (DEV 2). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$. Alors $\mathbb{K}[u] \cdot x$ admet un supplémentaire stable par u dans E .

C-ex 48. Un sous-espace n'admet pas forcément un supplémentaire stable. Considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A)$.

Thm 49 (Décomposition de Frobenius - DEV 2). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $s > 0$ et une famille de polynômes unitaire non constants $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que l'on ait la décomposition suivante, dite de Frobenius :

1. $P_s \mid \dots \mid P_1$
2. $E = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{K}[u] \cdot x_i$, où $\mu_{u,x_i} = P_i$.

Thm 50. Une telle décomposition est unique.

Déf 51. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de

$$P \text{ la matrice } C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Prop 52. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\chi_{C_P} = P$

Prop 53. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est cyclique, alors il existe une base de E telle que sa matrice dans cette base est une matrice compagnon.

Cor 54. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille de polynômes unitaire non constants $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que :

1. $P_s \mid \dots \mid P_1$

2. Il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit la matrice diagonale par blocs $(C_{P_1}, \dots, C_{P_s})$

Thm 55. Deux endomorphismes sont semblables, si et seulement si, ils admettent la même même famille de polynômes dans la décomposition de Frobenius.