

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soient $\mathbb{K}$ un corps. E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Sous-espaces stables

[MM22]

I.1 Définitions

Déf 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Ex 2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par u . Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .

Ex 3. Tous les sous-espaces sont stables par une homothétie.

Prop 4. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u et v . Alors F est stable par $u + v$ et $u \circ v$.

Prop 5. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in GL(E)$ et F un sous-espace stable par u . Alors $v(F)$ est un sous-espace stable par $v \circ u \circ v^{-1}$.

Prop 6. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\text{Ker } v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .

I.2 Endomorphismes induits

Déf 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u . L'endomorphisme induit par u sur F est l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par $u_F(x) = u(x)$, $\forall x \in F$.

Ex 8. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Un sous-espace F de E est stable par p , si et seulement s'il est somme directe d'un sous-espace de $\text{Ker } p$ et d'un sous-espace de $\text{Im } p$.

Prop 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace de E stable par u . Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

App 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence $n = \dim E$. Alors les sous-espaces stables de u sont exactement les $\text{Ker } u^k$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Prop 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F et G deux sous-espaces stables par u tels que $E = F \oplus G$. Alors $\mu_u = \text{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_G})$ et $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$.

I.3 Sous-espaces cycliques

Prop 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Une intersection de sous-espaces stables par u qui contiennent x , est encore un sous-espace stable par u qui contient x .

Déf 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le sous-espace cyclique de u associé au vecteur x est le plus petit sous-espace stable par u contenant x , c'est à dire l'intersection des sous-espaces stables par u contenant x . On le note $E_{u,x}$.

Prop 14. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, alors $E_{u,x} = \text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.

Thm 15. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Notons $\mathbb{K}[u] \cdot x = \{P(u)(x) : P \in \mathbb{K}[X]\}$. L'application $\theta_{u,x} : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[u] \cdot x$, $P \mapsto P(u)(x)$ est une application linéaire surjective. Son noyau est un idéal principal de $\mathbb{K}[X]$.

Déf 16. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$. On appelle polynôme minimal de u en x , noté $\mu_{u,x}$, l'unique générateur unitaire de $\text{Ker } \theta_{u,x}$.

Prop 17. Si l'on note $d := \deg \mu_{u,x}$, $E_{u,x} = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$.

Déf 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un endomorphisme u est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$.

Prop 19. $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique, si et seulement si, $\deg \mu_u = n$.

Prop 20. $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique, si et seulement si, $\mu_u = \chi_u$. Entre autre, si u est cyclique, $\chi_u(u) = 0$.

App 21 (Cayley-Hamilton). Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est un polynôme annulateur de u .

II Décomposition en sous-espaces stables

II.1 Lemme des noyaux

Prop 22. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Alors la matrice de u dans une base adaptée est diagonale par blocs.

Prop 23. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $P \mid \mu_u$. Notons $F := \text{Ker } P(u)$, alors $u_F = P$.

Lemme 24 (des noyaux). Soit $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{K}[X]$ premiers deux à deux entre eux. Notons $P = P_1 \dots P_s$. Alors $\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^s P_i(u)$. De plus, le projecteur de $\text{Ker } P(u)$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres appartient à $\mathbb{K}[u]$.

App 25. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u . Notons $P = P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteur d'irréductibles. Alors $\bigoplus_{i=1}^s \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$ est une décomposition de u en sous-espaces stables.

App 26 (DEV 2a). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$.

II.2 Sous-espaces propres, caractéristiques

Déf 27. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . L'espace $E_\lambda := \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est appelé espace propre de u associé à la valeur propre λ .

Prop 28. Pour toute valeur propre λ de u , E_λ est stable par u .

Prop 29. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

App 30. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
2. Les sous-espaces propres de u sont en sommes directes dans E .
3. μ_u est scindé à racines simples.

Cor 31. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, et F est un sous-espace stable par u , alors u_F est diagonalisable.

Thm 32. Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E . Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est co-diagonalisable, si et seulement si, les endomorphismes u_i et u_j commutent pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Déf 33. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . Soit $m_a(\lambda)$ sa multiplicité algébrique, c'est à dire sa multiplicité dans χ_u . On appelle espace caractéristique l'espace $F_\lambda := \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_a(u)}$.

Prop 34. Pour toute valeurs propre λ , F_λ est stable par u . De plus, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(u)} F_\lambda$.

II.3 Décomposition de Fitting

Thm 35 (suite des noyaux itérées). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(\text{Ker}(u^k))_k$ est une suite strictement croissante, stationnaire à partir d'un rang p .

Cor 36. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, d'indice de nilpotence r . Alors il existe des sous-espaces $F_r, \dots, F_1$ tels que :

1. Pour tout $1 \leq k \leq r$, $F_k \oplus \text{Ker}(u^{k-1}) = \text{Ker}(u^k)$
2. Pour tout $2 \leq k \leq r$, $u(F_k) \subseteq F_{k-1}$.

Lemme 37 (Lemme de Fitting - DEV 1). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$

Thm 38 (Décomposition de Fitting - DEV 1). Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$. Alors $v := u_{\text{Ker}(u^p)}$ est nilpotent, et $w := u_{\text{Im}(u^p)}$ est inversible. Si l'on note $F := \text{Ker}(u^p)$ et $G := \text{Im}(u^p)$, on appelle $((F, G), v, w)$ la décomposition de Fitting de u .

Cor 39 (Cardinal du cône nilpotent - DEV 1). Soient $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments et $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors $N_n := |\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n(n-1)}$.

III Application à la réduction

III.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Thm 40. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. On l'appelle adjoint de u .

Prop 41. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

1. $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$. Entre autre, $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$.
2. La matrice de u^* dans une base orthonormée de E est la transposée de la matrice de u dans cette base.
3. Si F est un sous-espace de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

Déf 42. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint si $u^* = u$. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints.

Prop 43. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux.

Thm 44 (Théorème spectral). Pour tout $u \in S(E)$, il existe une base ortho-normée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

III.2 Réduction de Frobenius

Prop 45 (DEV 2b). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$. Alors $\mathbb{K}[u] \cdot x$ admet un supplémentaire stable par u dans E .

C-ex 46. Un sous-espace n'admet pas forcément un supplémentaire stable. Considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A)$.

Thm 47 (Décomposition de Frobenius - DEV 2b). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $s > 0$ et une famille de polynômes unitaire non constants $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que l'on ait la décomposition suivante, dite de Frobenius :

1. $P_s \mid \dots \mid P_1$
2. $E = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{K}[u] \cdot x_i$, où $\mu_{u,x_i} = P_i$.

Thm 48. Une telle décomposition est unique.

Déf 49. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de

$$P \text{ la matrice } C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Prop 50. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\chi_{C_P} = P$

Prop 51. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est cyclique, alors il existe une base de E telle que sa matrice dans cette base est une matrice compagnon.

Cor 52. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille de polynômes unitaire non constants $P_1, \dots, P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que :

1. $P_s \mid \dots \mid P_1$
2. Il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit la matrice diagonale par blocs $(C_{P_1}, \dots, C_{P_s})$

Thm 53. Deux endomorphismes sont semblables, si et seulement si, ils admettent la même même famille de polynômes dans la décomposition de Frobenius.

Bibliographie

- [MM22] Roger MANSUY et Rached MNEIMÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endormorphismes*. 2022.