

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

[Can09]

I Intégrales de fonctions continues

I.1 Sur un segment

Déf 1. Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie et continue sur un segment $[a, b]$, $a < b$. Alors la suite $(S_N(f))_{N \geq 1}$ définie par

$$S_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k \frac{b-a}{N})$$

converge vers une limite finie. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$.

Ex 2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Thm 3. Soit f continue sur $[a, b]$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$. Elle vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $F(a) = 0$. On dit que F est une primitive de f .

C-ex 4. La fonction $\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}$ n'admet pas de primitive sur $[0, 1]$.

Prop 5. Si f est continue sur $[a, b]$, et si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors pour tout $c, d \in [a, b]$, $\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c) =: [f(t)]_c^d$.

Ex 6. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2$.

Thm 7 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Ex 8. $\int_0^1 xe^x dx = 1$

App 9. Soient f une fonction $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $[a, b]$, et g une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que : $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx$.

Thm 10 (Changement de variable). Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, et soit f continue sur $\varphi([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Ex 11. En posant $x = \sin t$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt = \frac{\pi}{4}$.

I.2 Intégrales impropres

Déf 12. Soit f continue sur $[a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^x f(t)dt$ tend vers une limite finie lorsque $x \rightarrow b$. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Ex 13. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, et on a alors $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha \leq 1$, l'intégrale est divergente.

Ex 14. L'intégrale $\int_0^1 \ln x dx$ est convergente, et on a que $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

Ex 15. $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} = \frac{1}{1+\xi^2}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Déf 16. On dit que $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si $\int_a^b |f(t)|$ est convergente.

Ex 17. $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente, non intégrable.

II Intégrales à paramètres

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Thm 18 (Convergence dominée). Soit une suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X dans $\mathbb{R}$ mesurable qui converge μ -p.p. vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une fonction g μ -intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p.. Alors f est μ -intégrable et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \int_X f$$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non vide, $f : X \times I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Thm 19 (Continuité sous l'intégrale). Si :

- pour tout $y \in I$, $f(\cdot, y)$ est mesurable sur X ,
- pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est continue sur I ,
- pour tout $K \subset I$ compact, il existe $g_K : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que, pour tout $y \in K$, $|f(\cdot, y)| \leq g_K$ p.p..

Alors la fonction $F : y \in I \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est bien définie et continue sur I .

Ex 20. Soit $f \in L^1$, alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Thm 21 (Dérivation sous l'intégrale). Supposons I ouvert, et :

- i) pour tout $y \in I$, $f(\cdot, y)$ est intégrable sur X ,
- ii) pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est dérivable sur I ,
- iii) pour tout $K \subset I$ compact, il existe $g_K : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que, pour tout $y \in K$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y)| \leq g_K$ p.p..

Alors, la fonction F est dérivable sur I et pour tout $y \in I$:

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x).$$

Ex 22. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Si $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors sa fonction caractéristique φ_X est dérivable, de dérivée $\varphi'_X(t) = -i\mathbb{E}(Xe^{itX})$.

Ex 23. [Can09][p.46] On pose $C = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$. La fonction $\varphi : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ est dérivable, de dérivée $\varphi'(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$. On remarque que $\varphi'(t) = -\frac{C}{\sqrt{t}} + \varphi(t)$. La résolution d'une équation différentielle nous donne que $\varphi(t) = e^t(\pi - 2C \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx)$. Pour $t \rightarrow +\infty$, il vient que $C^2 = \pi$, d'où $C = \sqrt{\pi}$.

Ex 24. Pour calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$, on étudie $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$ qui est la fonction $\arctan + \frac{\pi}{2}$ car $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$. D'où $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$

App 25 (Transformée de Fourier de la Gaussienne). (DEV 1) Soit $a > 0$, alors $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4a}\right)$

Thm 26 (Inversion de Fourier). (DEV 1) [El 08][p.116] Si $\widehat{f} \in L^1$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

Ex 27. Pour calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on applique la formule d'inversion à $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. D'où $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|}$.

Trouver des exemples où on utilise des transformées de Fourier pour calculer des intégrales

III Par l'analyse complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ [Rom24]

Déf 28. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue, et $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégrale curviligne de f le long de γ est le nombre complexe : $\int_{\gamma} f(z) dz =$

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ex 29. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma_{z_0, r} : [0, 2\pi] \rightarrow C(z_0, r)$, le cercle de centre z_0 et de rayon r . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\gamma_{z_0, r}} (z - z_0)^n dz =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi r^{n+1} & \text{si } n = -1 \end{cases}.$$

Thm 30 (Cauchy). Si Ω est étoilé par rapport à l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, toute fonction continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ admet une primitive sur Ω . Ces primitives sont les fonctions $z \mapsto \int_{[z_0, z]} f(u) du + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Enfin, pour tout lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ex 31. L'intégrale de la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ suivant le lacet γ_R défini p.139 du [Can09] est nulle. On en déduit la valeur de l'intégrale de Fresnel : $\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}$.

Thm 32 (des résidus). Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert simplement connexe Ω , ayant un ensemble fini de pôles $S = \{z_1, \dots, z_p\}$. Pour tout lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus S$, on a : $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^p \text{Ind}_{\gamma}(z_k) \text{Res}(f, z_k)$.

Ex 33. [Can09][p. 130] Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$, on étudie l'intégrale $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4}$, où γ_R est le chemin formé de la juxtaposition du segment $[-R, R]$, et du demi cercle C_R^+ (faire un dessin en annexe). Il vient que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Ex 34 (DEV 2.a). Pour tout $x \in]0, 1[$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{tx}}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

IV Fonctions à plusieurs variables

IV.1 Intersion d'intégrales

[Can09], soit $n \geq 2$

Thm 35 (Tonelli). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive. On a que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \right) dx_i \end{aligned}$$

En particulier, toutes ces intégrales sont simultanément finies, ou égale à $+\infty$.

Thm 36 (Fubini). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. La fonction f est intégrable, si et seulement si,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |f| dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_{n+1} \right) dx_n < +\infty$$

et dans ce cas, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \right) dx_i \end{aligned}$$

C-ex 37. [Can09][p.211] L'hypothèse de l'intégrabilité est essentielle. Considérons $f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$ définie sur $[0, 1]^2$. On a que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f dx_2 \right) dx_1 = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f dx_1 \right) dx_2$$

Ex 38. Soit $A > 0$. L'application $f :]0, A[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin x$ est intégrable. Par le théorème de Fubini, on a que $\int_0^{+\infty} \int_0^A f(x, y) dx dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$. En calculant la première intégrale, et en faisant tendre A vers $+\infty$, on déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$

IV.2 Changement de variables

Thm 39 (Formule du changement de variables). Soit $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Une fonction mesurable f est intégrable sur $\mathcal{V}$ si et seulement si, $(f \circ \varphi) |\det J_{\varphi}|$ est intégrable sur $\mathcal{U}$. Et dans ce cas,

$$\int_{\mathcal{V}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(y_1, \dots, y_n)) |\det J_{\varphi}(y_1, \dots, y_n)| dy_1 \dots dy_n$$

App 40 (Formule des compléments - DEV 2.b). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Prop 41 (Passage en coordonnée polaire dans $\mathbb{R}^2$). Soit $D =]-\infty, 0[\times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un $\mathcal{C}$ difféomorphisme, et $J_{\varphi}(r, \theta) = r$.

Ex 42. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-r^2} d\theta dr = \pi$. On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Bibliographie

- [Can09] Bernard CANDELPERGER. *Calcul intégral*. Cassini, 2009.
- [El 08] Mohammed EL AMARANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [Rom24] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation externe - Analyse*. deboeck, 2024.