

262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

➤ Références	[MODE_Proba], [ExoProba], [Barbe&Ledoux]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@21 janvier 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Jürgen Angst
➤ Développement choisis	Théorème de Lévy + TCL, Hoeffding/Borel-Cantelli/App
🔍 Nb choisis	2
➤ Développement	Théorème de Lévy + TCL

Rapport de Jury

- lien entre diff modes convergence illustrer ex et c ex
- réciproques partielles
- LGN TCL au cœur leçon
- preuve LFGN éventuellement hyp confort peut être présenté
- estimation ponctuelle ou intervalle confiance ont leur place
- + loin: monte carlo, chaîne markov, marche aléatoire

Introduction

- physique statistique ???
- On s'intéresse à des var, on leur associe des mesures, on se propose de voir comment s'articule les différents mode de cv.
- extension de la notion de convergence, intéressant de s'intéresser à des phénomènes limites (en nombre d'étapes Chaîne de Markov, en nombre de réalisations ex quand fait des stats..)

Plans

▼ Plan

- I. Convergence ps, proba et LGN
 1. ps
 2. proba
 3. LGN
- II. Convergence Lp et martingales
 1. Définitions
 2. Uniforme intégrabilité
 3. Martingales
- III. Convergence en loi et TCL
 1. CV en loi
 2. TCL
 3. Intervalle confiance

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. ps
 - Borel Cantelli [MODE ou B&L] + exemple (singe qui tape à la machine à écrire)
 - Def presque sur [B&L] + prop équivalente [MODE]
 - Corollaire Borel cantelli pour montrer la cv ps [B&L] + Exemple: $P(X_n=n)=1/n^2$
 - Hoeffding + application [Ouvard2 ou 40dev]
- ▼ I. 2. proba
 - Def cv en proba + Exemple [B&L]
 - Ps $\Rightarrow$ proba + réciproque fausse
 - exo 5.6 [ExoProba] : $X_n=1$ avec proba $1/n$ cv en proba vers 0 mais pas ps
 - réciproque: proba $\Rightarrow$ sous suite cv ps [MODE]
 - (ex de suite de var cv en proba mais pas ps: $X_n \sim \text{Poisson}(\ln(n))$. La suite (X_n) cv ps.)
[pas de ref]
 - exo somme cv proba ssi cv ps ??? [ExoProba]
 - continuous mapping theorem [B&L]

- (très truc des distances $d(X,Y)=E[\min(|X-Y|,1)]$ cv en proba = cv pour cette distance...)

▼ I. 3. LGN

- Loi faible des grands nombres [B&L]
- Loi forte des grands nombres [B&L]
- Méthode de Monte Carlo (intérêt on peut lui appliquer n'importe quel fct
même non lisse, autre intérêt marche en n'importe quelle dimension)
[pas de ref]
- Exemples de Monte carlo uniforme sur $[a,b]$ + normale **[pas de ref]**

▼ II. 1. Def

- Def var L_p + def cv L_p [B&L]
- Cv $L_p \Rightarrow$ cv en proba + contre exemples cv en proba et cv ps
n'implique
pas cv L_p :
- cv en proba sur $[0,1]$ muni de la tribu borelienne et la proba
uniforme, $X_n(w)=w^{1/n}$ ind $_{[0,1/n]}(w)$. On a $X_n \rightarrow 0$ en proba mais X_n
n'est pas L_p pour $p \geq 1$
[B&L]
- cv ps dans $\mathbb{R}$ muni des boréliens et X_n tq pour tout $n \geq 1$,
 $P(X_n=n)=1/n^p=1-P(X_n=0)$ alors X_n cv vers 0 ps mais X_n ne cv pas
 L_p
[B&L]
- LGN L_1 ??

▼ II. 2. Uniforme intégrabilité

- Def UI + def équivalente + exemples : famille finie et famille dominée
[B&L]
- Réciproque: X_n cv en proba vers X et X_n UI ssi X intégrable et cv L_1
[B&L]
- Corollaire si $\sup E[|X_n|^q] < +\infty$ alors pour tout p dans $[1,q]$ on a $\lim$
 $\|X_n - X\|_p = 0$
[B&L] + exemple???

▼ II. 3. Martingales (mettre moins de thm et traiter l'exemple de l'urne de Polya)

- Def martingales (filtration? Temps d'arrêt?) [B&L] + exemple
classique (urne
de Polya, modèle de wright fischer) urne de polya en exo 3 de
[B&L]
- Thm d'arrêt de Doob + exemple ruine du joueur ?? nécessaire ici ??
- Thm de cv de martingale (positive ou au moins L_1 à voir pour L_p et L_2
+
dur)
[MODE]
- Thm martingale fermée ssi UI ssi cv ps et L_1 [MODE]
- app : continuité conditionnement $\Rightarrow$ loi du 0/1 de Lévy ou de
Kolmogorov **[poly JCB...]**

▼ III. 1 Convergence en loi

- Def (équivalentes?) [MODE]
- thm cv en loi avec fonction de répartition + ex dirac en $1/n$ [MODE]
- autres critères pour ν entière : $P(X_n=k) \rightarrow P(X=k)$ pour tout k ,
fonction génératrice, pou ν à densité un sens mais pas l'autre

[MODE]

- exemple : $B(n, p_n)$ cv vers $\text{poisson}(\lambda)$ où $np_n \rightarrow \lambda$ [B&L]
- Thm de Lévy [MODE] (rq : application au TCL)
- Cv proba $\Rightarrow$ cv en loi + contre-exemple réciproque : $X_n = (-1)^n X$ alors $X_n \Rightarrow X$ mais X_n cv pas ps ni en proba vers X avec X symétrique ($N(0,1)$ par ex) [B&L]
- réciproque : cv en loi vers cst $\Rightarrow$ cv en proba [B&L] et [MODE]
- Théorème de Slutsky $X_n \Rightarrow X, Y_n \Rightarrow c$ Alors $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, c), X_n + Y_n \Rightarrow X + c, X_n Y_n \Rightarrow Xc$

[MODE]

- CV en loi loi du nbr de cycle ?

▼ III.2. TCL

- TCL [B&L]
- 4.15 [ExoProba] $\exp(-n) \sum \dots$ cv vers $1/2$ (ou exo 255 de l'intégration en proba)
- rq : tcl sert beaucoup pour intervalles de confiance asymptotiques dans partie suivante
- (Convergence monte carlo en $O(1/n^{1/2})$?? mettre dans intervalle de confiance plutôt?)
- Si on devient fort TCL multi D

▼ III.3 Intervalle de confiance asymptotique

- Def statistique/estimateur???
- Def estimateur de la moyenne/ variance empirique (corrigé) + consistant?
- Exemple d'intervalle de confiance asymptotique avec un niv de confiance $1-\alpha$. (moyenne inconnu, variance inconnue, moyenne et variance inconnue) $\rightarrow$ exemple dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo ? si oui, voir mémoire Coline

- unicité des limites ps ?
- ref méthode de monte carlo ? peut être : P. Toulouse. *Thèmes de probabilités et statistiques*. Dunod, 1999