

190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

➤ Références	[GOU_AGP], [ROM_AG]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@7 mai 2025
☰ Statut leçon	À faire
≡ Enseignant	Sébastien Moskowitz
➤ Développement choisis	<u>Nbr de Bell</u> , <u>Loi de réciprocity quadratique</u>
🔍 Nb choisis	2
➤ Développement	<u>Nbr de Bell</u> , <u>Lemme de Fitting et dénombrement des matrices nilpotentes sur F_q</u> , <u>Loi de réciprocity quadratique</u>

Rapport de Jury

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möbius ou de la formule de Burnside. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \rightarrow \infty$...).

Introduction

- hyper utile, notamment quand cherche à calculer des probabilités sous une loi uniforme
- compter peut également être utile pour montrer l'existence
-

Plans

▼ Plan

- I. Dénombrements élémentaires/ premiers résultats
 1. Résultats de base
 2. Premiers outils
- II. Séries et formules d'inversions
 1. Séries
 2. Inversion de Pascal
 3. Mobius
- III. Utilisation d'action de groupes
 1. Rappels
 2. Relation orbite Stabilisateur
 3. Formule de Burnside
- IV. Permutations aléatoires
- Annexe: tableau récapitulatif

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1.
 - nbr d'applications de $|X|=k$, dans $|F|=n$ est n^k = nbr d'extractions de k éléments dans un ensemble à n éléments avec ordre et répétition
 - nbr de celles-ci injectives: $n!/(n-k)! =$ nbr d'extractions de k éléments dans un ensemble à n éléments avec ordre et sans répétition
 - deux ensembles finis en bijection ont même cardinal + app: nbr de parties d'un ensemble fini: $P(X)$ en bijection avec l'ensemble des fonction de X dans $\{0,1\}$ + app: carrés de F_q
 - nbr de parties à k éléments $\rightarrow$ coeff binomiaux (lemme des bergers?)
 - un petit exemple de proba
 - tableau récapitulatif en annexe ? "nbr d'extractions de k éléments dans un ensemble à n éléments quand l'ordre importe/n'importe pas, quand les répétitions sont autorisées/non autorisées"
 - application des combinaison avec répétition: $\dim_K(K[X_1, \dots, X_n]^d) = n$ parmi $n+d$
- ▼ I. 2. Premiers outils
 - Lemme des tiroirs

- énoncé
- app: Bolzano Weierstrass
- ° Formule du Crible
 - énoncé
 - app: équation $ax^2+by^2=1$ dans corps finis
 - dérangements avec Pascal ? nbr de surjections sans Pascal?

▼ II. 1. Séries

- ex de comment on paie
- DEV 1 Bell: trouve relation de récurrence
- (retrouve nbr dérangement ?)
- autre: Fibonnacci ? Catalan ?

▼ II. 2. Inversion de Pascal

- formule de Pascal
- app: nbr de surjections
- app: nbr de dérangements

▼ II. 3. Fonction de Mobius

- def
- prop:
- app: indicatrice d'Euler
- dénombrement polynômes irréductibles sur F_q

▼ III.1. Rappels

- def action groupe, orbite, stabilisateur, point fixe
- ex: permutation circulaire

▼ III.2. Relation orbite stabilisateur

- prop: relation
- réciprocité quadratique DEV 2
- si veut auto S_n

Dans les corps finis:

- nbr de matrices inversible
- rq: Sylow
- Fitting: dénombrement du cône nilpotent

▼ III.3. Formule de Burnside

- Formule de Burnside (idée de la démo: compter de deux manières différentes)+ nbr moyen de point fixe et variance
- coloriage: (arête octogone avec groupe diédral) + coloriage du cube (NH2G2.T2)

▼ IV. Permutations aléatoires

On a déjà vu dérangement, nbr moyen de point fixe)

- 3 Algos + 3 applications: nbr d'inversion/nbr de cycles /nbr de descente