

171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

➤ Références	[Audin], [Griff], [ROM_AG], [PGCD]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@24 septembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
👤 Enseignant	Françoise Dal'bo
➤ Développement choisis	Groupe $O(k,l)$, Lemme de Morse
🔍 Nb choisis	2
➤ Développement	Lemme de Morse, Groupe $O(k,l)$

Rapport de Jury

- loi d'inertie de Sylvester et orthogonalisation simultanée
- algo de Gauss et lien avec la signature énoncé
- signification géo de r et s
- différentielle seconde fct plusieurs variables
- déf et prop classiques d'un plan euclidien
- lien classification quadra et coniques
- lien discriminant et la signature de la forme quadratique

Introduction

→ poly homogène de degré 2 qui apparaissent dans plusieurs domaines: la recherche d'extremes avec la Hessienne ou en physique
 Un autre exemple très classique est la forme $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ sur $\mathbb{R}^4$, qui permet de définir l'espace de Minkowski utilisé en relativité restreinte
 →

Plans

▼ Plan

- I. Formes bilinéaires, formes quadratiques, isotropie (tout pareil 170 sauf ex)
 1. Forme bilinéaire
 2. Forme quadratique
 3. Isotropie
- II. Réduction des formes quadratiques réelles
 1. Bases orthogonales et méthode de Gauss
 2. Théorème de Sylvester
 3. Application à la Hessienne
- III. Orthogonalité
 1. Espace orthogonal
 2. Groupe orthogonal
- IV. Conique

→ Rombaldi, Audin ?

Annexe: schéma des coniques

▼ Plan détaillé

- Griffone
- ▼ I.1. Forme bilinéaire
 - def forme bilinéaire
 - def matrice d'une forme bilinéaire + def application linéaire associée
 - rq j pratique dimension infinie
 - def du rang en terme de matrice/j
 - def du noyau en terme de matrice/j
 - def dégénérée en terme de matrice/j
 - ex ? (peut être symétrique)
 - prop théorème du rang bizarre
 - def symétrique + prop matrice dans toute base symétrique + ex du produit scalaire euclidien + Hessienne
 - ▼ I.2. Forme quadratique
 - def forme quadratique avec forme bilinéaire
 - prop b unique: appelle forme polaire
 - ex de l'intégrale de polynômes p 306
 - rq homogène degré 2 en dimension finie
 - on appelle rang, noyau truc pareil de la forme bilinéaire associée

- def définie, définie positive
- définie positive $\Rightarrow$ non dégénérée
- ex global p 307 avec forme polaire, matrice, définie positive
- prop: deux matrices représentent la même forme quadratique ssi changement de base

▼ I.3. Notion d'isotropie

- vecteur isotrope
- ex dans l'exemple précédent e_3 isotrope
- forme quadra définies st les formes quadra dt seuls vecteurs isotrop est le vect nul
- cône isotrope
- rq cône et pas sev
- exs + figures en annexe
- prop noyau dans $I(q)$
- rq on a pas l'inclusion dans ex précédent $N(q)=0$
- rq: on peut voir une conique d'un plan affine de $\mathbb{R}^2$ comme l'intersection d'un cône isotrope d'une forme quadratique et d'un plan

▼ II. 1. Bases orthogonales et méthode de gauss

- définition vecteur orthogonaux
- def base orthogonale et orthonormée
- Oral: rq: la recherche de bog revient à chercher une base dans laquelle q est diagonale ou à écrire q sous la forme d'une somme de termes carrés
- théorème existe toujours base orthogonale + somme de carrés et matrice
- méthode de gauss (Attention pas écrit dans Griffone) + appli: obtient forme orthogonale comment ? + ex p 312
- diagonalisation simultanée: avec le produit scalaire et q quelconque (oral: application dans la dernière partie)

▼ II. 2. Théorème de Sylvester

- théorème: signature + ne dépend que de la forme quadratique, pas de la base
- rq si t'es non dégénéré, $k+l=n$ + définie/positive si a de la place
- rq lien avec méthode de gauss
- ex signature du truc d'avant
- App: comptage des racines d'un polynome (rg signature)

▼ II. 3. Application à la Hessienne

$\rightarrow$ PGCD

- def
- Schwarz $\Rightarrow$ c'est une forme quadratique
- dev 1: lemme de Morse
- Étude de la position relative d'une surface par rapport à son plan tangent

▼ III. 1. Sous espaces orthogonaux

- def orthogonal d'une partie

- ex avec la forme quadratique $b(M,N)=\text{Tr}(MN)$ on a orthogonal de S_n c'est A_n
- props toute page
- rq "on a pas toujours la somme directe même quand q est pas générée" (en prenant un vecteur isotrope)

▼ III.2. Groupe orthogonal

⇒ q non dégénérée

- def du groupe orthogonal pour une forme quadra non dégénérée
- f dans $O(q)$ ssi forme matricielle
- prop $\det f = \pm 1$
- dev 2: $O(k,l)$ avec une forme quadratique sur R , avec définition de la signature (H^2G^2) (voir ce dont on a besoin pour ça avant, forme polaire ?)

▼ IV. Conique

R^2

→ Rombaldi, grifone

- def d'une conique
- rq: intersection cône et plan
- ex simple
- classification selon la signature: ça, ça ou ça
- classification affine: orbites..
- application ? Ellipse de Steiner ? d'autres applications?
- prop: définition par foyer, directrice, excentricité (Audin)
- application

- lire quadrique
- peut être quand un un peu agrémenter les coniques quand aura du temps...jamais