

148 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

➤ Références	[M2M], [GOU_ANA], [Obj_pas_chômage], [Gozard], [GOU_AGP], [Griff]
📁 Section	Algèbre
📅 Date	@18 décembre 2024
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
≡ Enseignant	Bachir Bekka
➤ Développement choisis	Ore / Frattini, Réduction des endomorphismes normaux - eucliden
🔍 Nb choisis	2
➤ Développement	Ore / Frattini, Matrice de Gram + Hadamard, Polygones constructibles, Algorithme de Berlekamp

Rapport de Jury

- présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.
- On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension nie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.).
- À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie.
- Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc. Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extréma liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Introduction

- intérêt principal les bases
- utile en pratique: au lieu double inclusion: une inclusion + dimension (appl théo qui dit que $\dim$ sous espace est $\dim$ ev et $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$ pour $F \text{ sev}$)
- démos par récurrence..

Plans

▼ Plan

- I. Dimension d'espaces vectoriels
 1. Familles génératrices - libres - bases
 2. Dimension de (sous) espaces vectoriels
 3. Espaces vectoriels normés
- II. Rang
 1. Définitions
 2. Propriétés intéressantes
 3. Calcul effectif du rang

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Familles libres, familles génératrices, base
 - famille génératrice / libre + dimension finie
 - ex famille libre $\exp(\lambda x)$ λ dans $\mathbb{R}$, famille libre et non génératrice des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
 - base + tout élément unique combinaison linéaire de la base
 - ex de base:
 - si de dimension finie et non nul: peut extraire/compléter d'une famille génératrice/libre pour avoir une base

III. Application à la cardinalité dans les groupes et les corps grâce aux espaces vectoriels

1. Cardinalité de familles génératrices de groupes

2. Extensions de corps

Annexe:

▼ I. 2. Dimension d'un (sous) espace vectoriel

- si de dimension finie, toute base même nombre de vecteurs, c'est ce qu'on appelle la dimension
- ex $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- quand famille à n élément dans espace de dimension n : génératrice ssi libre ssi base

° dimension d'espaces d'applications linéaires

- $L(E, F)$ et forme linéaires (application de "deux espaces sont isomorphes ssi même dimension" ? à caser avant si le cas)
- ex déterminant: dimension des formes n linéaires alternées
- équa diff et base de solution (vraiment une applicaton ici ? sinon mettre comme ex de dimension d'un sous espace vectoriel) Gourdon analyse ?

° Sous espace vectoriel

- F un sev de E de dimension finie: alors F de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$
- app: une double inclusion montrée à la place par inclusion
- app: dimension: $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$ (on met Grassman ? comment se montre si indep des trucs de somme directes, comme application de double inclusion) + ex matrice Sym/Antisym
- (existence d'un supplémentaire)
- app: résultats se montrant par récurrence sur la dimension de E :
- → Réduction des endomorphismes normaux DEV1
- → Générateurs de $O(E)$

▼ I. 3. Espaces vectoriels normés

→ regarder leçon compacité et EVN

- normes équivalentes
- contre ex ?
- app: applications linéaires en dimension finie continues
- app: compacts sont les fermés bornés
- app: Sev de dimension finie sont fermés
- contre ex ?
- app: Riesz
- contre ex: dimension infinie
- app de Riesz ?

▼ II. 1. Définitions respectives des rang

° Vecteurs:

- Rang d'une famille de vecteurs: dimension du sous espace vectoriel associé

° Matrices

- rg d'une matrice: rang de la famille des vecteurs colonnes
- ex matrices de Gram: $\text{rg}(M(e_i)) = \text{rg}(e_i)$

° Endomorphismes:

- def rang d'un endo $\dim(\text{Im } f)$
- prop: quelque soit la base de la matrice, rg coïncide

▼ II. 2. Propriétés intéressantes

° Théorème du rang

- théorème du rang

- prop: si E et F de même dim finie : bij equi injective equi surjective
- (extremes liés)
- corollaire version matrice inversible ssi $\text{rg}(A) = n$ + app: Déterminant de matrice nulle ssi [surjective] famille liée

° Equivalence entre matrices

- A de rang $r \Rightarrow$ équivalentes à matrices blocs avec I_r en haut à gauche
+ Cor : $\text{rg}(A) = \text{rg}(tA)$. + corollaire: matrices sont équivalentes ssi même rang

▼ II.3. Calcul effectif du rang

- Prop : le rang d'une matrice est la taille du plus grand sous-déterminant non nul.
- Prop : les opérations élémentaires ne modifient pas le rang. App : calcul du rang d'une matrice. avec pivot de gauss: nombre de lignes non nulles
- app: Berlekamp (trouver la dimension du rang pareil que trouver dimension du noyau)
- (rang systèmes linéaires, lien résolution)

▼ III. 1. Cardinalité de familles génératrices de groupes

→ Max de Maths, Zavidovique

- def famille génératrice / minimale
- rq pas comme dans les ev: peut avoir des familles génératrices et minimales au sens de l'inclusion qui ne sont pas de même cardinal + ex
- définition du sgrp de Frattini
- lemme $G/F(G)$ est un Fp- ev
- théo de Frattini: dans le cadre des p-groupes (card p^α) alors ça marche bien "toute famille génératrice minimal à même cardinal")

▼ III.2. Extensions de corps

→ Gozard

- Def : extension de corps,
- prop: L est un K -ev
- + définition degré de l'extension.
- Des ex
- rq: pas unicité du degré ref?
- Thm : thm de la base télescopique.
- Cor : multiplicativité du degré.
- app: injections dans les corps finis (à vérifier)
- Def : elt algébrique, polynôme minimal.
- Thm : $a \in K$ est algébrique sur $k \Leftrightarrow k[a]$ est de dim finie, et cette dim est le degré du polynôme minimal. Un ex.

- existence polynôme annulateur application de si plus de n vecteurs alors famille liée $\Rightarrow$ CL nulle $\Rightarrow$ polynôme annulateur