103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Références	[Perrin], [Calais], [M2M]
Section	Algèbre
Date	@9 octobre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Françoise Dal'bo
Développements choisis	Ore / Frattini, Automorphismes de Sn
Nb choisis	2
Développements	Ore / Frattini, Simplicité de SO3(R)

Rapport de Jury

- conjugaison doit être développée et illustrée dans situations variées
- aide à résoudre pb en transformant un élément en un élément plus simple
- illustrer "transport par conjugaison" → même nature
- développer intérêt sgrp distingué → intérêt de la structure du quotient, lien entre sgrp distingué et noyau morphisme, factorisation d'un morphisme au travers quotient. Indispensable: lien entre sous groupes de l'un et de l'autre (théo correspondance) et caractérisation interne des produits directs
- simplicité de certains groupes peut etre proposé
- exemple dans d'autres domaines comme arithmétique, géo et algèbre linéaire

Introduction / annonce de plan

→ intro: on a l'habitude de la réduction des endomorphismes, illustre bien principe de conjugaison, multiplie un objet par P et P^-1 pour avoir représentant cool + principe de conjugaison "même nature géométrique"

→ distingué utile pour avoir structure de groupes des groupes quotients. Pourquoi quotiente ? groupe plus petits: pratiques pour étude (se ramener à des groupes de cardinaux plus petits.)

→ simples: briques de base car pas de sous-groupe distingué donc pas de quotient

→ produit semi-direct: idée: reconstruire un groupe à partir d'un groupe normal et d'un autre groupe (voir du quotient ?)

Plans

▼ ***Plan***

I. Action par conjugaison

1. Rappels sur les actions de groupes
2. Action par conjugaison

II. Groupes distingués et simples

1. Défiitions, premiers exemples
2. Centre et groupe dérivé
3. D'autres propriétés pour montrer qu'un groupe est distingué/simple

III. Groupes quotients

1. Quotient par un groupe distingué
2. Théorème de correspondance
3. Théorèmes d'isomorphisme

Aut(Sn)=Int(Sn)

IV. Produits directs et semi-directs

1. Produits directs

2. Produits semi-directs

▼ ***Plan détaillé***

- ▼ I.1. Rappels sur les actions de groupes

  → Calais p. 196

  - doubles def
  - orbite
  - stabilisateur
  - relation orbite / stabilisateur et équations au classes (X union orbites)

- ▼ I. 2. Action par conjugaison

  → Ulmer et Perrin

  - def
  - classe de conjugaison, conjugué, centralisateur
  - rq automophismes et automorphismes intérieurs (c'est une action par autom. ils sont appelés intérieurs. C'est un sgrp de Aut en général inclus strictement ex A → tA^-1 sur GLn
  - principe de conjugaison "même nature géométrique"
  - exemples: action par conjugaison sur Sn, deux cycles sont conjuguées ssi même longueur + n≥ 5 3 cycles conjugués ds An (prop 4.10 Perrin) // ds GLn classes de conjugaison st les classes de similitudes: représentent même app linéaire dans deux bases, Caractérisation classe de conjugaison par Frobenius par les invariants polynomiaux // (à garder en tête : espace affine: h homothetie centre O de rapport lambda et t translation vecteur v alors tohot-1 est homothétie centre O+v de rapport lambda) // les reflexions sont conjuguées dans SOn
  - Equations aux classes n°2 + centre d'un p groupe non trivial + tout groupe d'ordre p2 abélien

- ▼ II. 1. Définitions, premiers exemples

  →

  - definition sgrp distingué/normal, sgrps simple
  - ex: - ds un groupe abélien, tout sgrp est distingué ainsi, les seuls groupes simples abéliens sont les Z/pZ avec p premier / un sous groupe d'indice 2 est distingué / Int(Sn) normal dans Aut(Sn)
  - prop: un sous groupe est distingué ssi c'est une union de classes de conjugaisons + csq A5 puis An simple pour n≠4
  - prop ker d'un morphisme + ex SLn distingué dans GLn et An distingué dans Sn + rq on verra que réciproquement tout sgrp distingué est noyau d'un morphisme

- ▼ II. 2. Zentre et groupe dérivé

  - def centre + prop: il est distingué + centre de GLn et centre de SLn + centre de SO_n(R) + app: SO_3(R) simple
  - def commutateur / groupe dérivé + prop: c'est un sgrp distingué + D(On)=SOn + D(Sn)=An

- ▼ II. 3. D'autres propriétés pour montrer qu'un groupe est distingué/simple

  - Théorèmes de Sylow + corol: S unique p-Sylow ssi S distingué + rq: permet de prouver que certains groupes ne sont pas simples + ex: Card(G)=pq^2 avec p<q premiers alors G a unique sous groupe d'ordre q^2 et il est distingué + ex: si Card(G)=99 alors G n'est pas simple (Perrin)
  - Lemme d'Ore + rq: si Card(G)=pq on retouve le res avec Sylow , app : (1) tout sous groupe d'ordre p^2 est isomorphe à Z/p^2Z ou à (Z/pZ)x(Z/pZ), (2) Enoncé deuxième lemme + Frattini

  transition : besoin de nouvel notion pour th de Frattini (quotient, th d'isomorphisme)

- ▼ III. 1 Quotient par un groupe distingué

  - H normal dans G alors G/H a une structure de groupe (proj= morphisme de groupe) + rq: H distingué alors H noyau de la proj de G dans G/H + ex: 2Z normal dans Z car Z abélien donc Z/2Z a une structure de groupe

- ▼ III.2. Théorème de correspondance

  - bijection entre les sous groupe (distingués) de G/H et les sous groupes (distingués) de G contenant H

- ▼ III.3. Théorèmes d'isomorphisme

  → Calais

- 1er th : f endomorphisme de G, G/Kerf isomorphe à Imf + ex: An isomorphe a Sn/Ker(signature) donc d'indice 2 : autre manière de mq An distingué + ex: Int(G) isomorphe à G/Z(G) + prop: G/H abélien ssi D(G) c H
- (2e th)
- (3e th) un des deux à mettre mais lequel ?

- Nous avons mtn vu tous les res nécessaires pour mq Int(Sn) = Aut(Sn)

▼ IV.1 Produits directs

→ Perrin

- def
- projections
- rq: jamais simple car noyau des projections donc distingués
- ex: théorème chinois
- caractérisation interne ???

▼ IV.2. Produits semi-directs

→ Perrin

- prop/def du Perrin
- exemple avec Sn = An psd <to>
- rq si alpha trivial retrouve produit direct
- rq jamais simple nan plus car projection sur N distingué (projection sur H distingué ssi produit direct)
- caractérisation
- ex: groupe diedral
- contre exemple de groupe qui ne se décompose pas en psd ex Z/8Z

Questions / approfondissements

- M et tM conjuguées ?
- G/Z(G) toujours simples ? des fois ? → dépend ex PSLn selon les corps
- résolubilité et critère de résolubilité: Hnormal dans G, H et G/H résolubles alors G résoluble
-