

35 Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

I. Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Normes équivalentes [LI] [IP]

Normes équivalentes, exemple, DEV 1 : équivalence des normes en dimension finie, tous les corollaires avec les contre-exemples

2. Applications linéaires [GOU]

Équivalences pour prouver la continuité, cas de la dimension finie, contre-exemple

3. Compacité [GOU] [IP]

Compacts en dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$, contre-exemple, DEV 1 : théorème de Riesz

II. Calcul différentiel

1. Différentielle et dérivées partielles [GOU] [ELA]

Fonction différentiable, utilité de la dim finie, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, expression de la différentielle, matrice jacobienne

2. Recherche d'extremums [ELA]

Différentielle seconde, théorème de Schwarz, hessienne, point critique, CN et CS pour être un extremum

III. Equations différentielles linéaires

1. Structure de l'ensemble des solutions [BER]

Equa diff linéaire, equa diff linéaire homogène

DEV 2 : théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Structure de S_H , structure de S

2. Matrice fondamentale et wronskien [BER]

Système fondamental, matrice fondamentale, wronskien, équivalence matrice fondamentale, expression des solutions, expression explicite pour le problème de Cauchy, identité d'Abel pour le wronskien

Présentation :

- L'équivalence des normes en dimension finie est cruciale, car permet de montrer que tous les EVN de dim finie sont complets pour n'importe quelle norme. Et la complétude est extrêmement importante en analyse. Un exemple d'application est que l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice.
- En calcul diff, on utilise la dimension finie pour ne pas avoir à se préoccuper des normes (elles sont équivalentes) et pour avoir directement que la différentielle est continue (car linéaire). De plus, on va utiliser les bases canoniques pour donner la définition des dérivées partielles.
On utilise également beaucoup le point de vu matriciel, par exemple avec la hessienne pour la recherche d'extremas.
- En pratique, pour trouver les extremums d'une fonction, on cherche d'abord les points pour lesquels toutes les dérivées partielles s'annulent. Puis pour chacun des points critiques, on étudie la matrice hessienne. Cette matrice est symétrique et représente une forme quadratique donc on cherchera ses valeurs propres réelles ce qui donnera la signature de la forme quadratique.
Cette étude ne donne qu'un résultat local : il faut ensuite étudier la fonction f .

Cette méthode est très efficace pour les fonctions de deux variables (en utilisant le déterminant et la trace de la matrice).

- On utilise la dimension finie dans les EDO linéaires car grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un SEV de dimension N . Ainsi on va pouvoir parler de base pour cet espace, ce qui conduit à la notion de matrice fondamentale.
- On peut retenir de manière informelle que : solution générale de l'équa diff avec second membre = solution générale de l'équa diff homogène + solution particulière de l'équa diff avec second membre.

Développements :

- Equivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz
 - Analyse, Gourdon, p51
 - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p422
- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
 - Equations différentielles, Berthelin, p30
 - Analyse pour l'agrégation, Bernis, p73

Références :

- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte
- [ELA] Calcul différentiel, El Amrani
- [BER] Equations différentielles, Berthelin

Section 206: Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé.

1) Normes équivalentes [L1] [ISF]

Def 1: Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes

si: $\exists m, b > 0$ tel que $\forall x \in E, a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$

Remarque 2: Deux normes équivalentes sur E définissent la même topologie sur E .

Exemple 3: Dans K^n , les normes $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont équivalentes: $\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \|x\|_1$ pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$

Théorème 4: Dans un EVN de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. DEV 1

Contre-ex 5: C'est faux en dimension infinie. On prend $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Alors les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. Il suffit de considérer la suite de fonctions $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (fonction triangle)

Corollaire 6: Tout EVN de dimension finie n est isomorphe à K^n , muni de l'une de ses normes usuelles.

Corollaire 7: Tout EVN de dimension finie est complet.

Corollaire 8: Tout SEV de dimension finie d'un EVN est fermé.

Contre-ex 9: Le sous-espace des fonctions polynomiales de $\mathcal{C}([0, 1], K)$ n'est pas fermé, par le théorème de Weierstrass.

Exemple 10: L'exponentielle matricielle est un polynôme en la matrice: $e^A \in K[A]$.

2) Applications linéaires [600]

Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN.

Théorème 11: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre:

1) f est continue sur E 2) f est continue en 0

3) $\exists M > 0$ tel que $\|f(u)\|_F \leq M \cdot \|u\|_E \quad \forall u \in E$

4) f est lipschitzienne

5) f est uniformément continue sur E .

Corollaire 12: Toute application linéaire d'un EVN de dim finie dans un EVN quelconque est continue.

Contre-ex 13: C'est faux en dimension infinie. Prendre $E = \ell^1(X)$ muni de $\|\cdot\|_1$ et $f(x) = \sup_{i \in I} |x_i|$. Alors f n'est pas continue.

3) Compacité [600] [ISF]

Corollaire 14: Les parties compactes d'un EVN de dim finie sont les parties fermées-bornées.

Exemple 15: $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Contre-ex 16: C'est faux en dimension infinie. Prendre $E = \ell^1(X)$ muni de $\|\cdot\|_1$ et $f(x) = \sup_{i \in I} |x_i|$. Alors $D = \{x \in E; \|x\|_1 \leq 1\}$ est fermé-borné. Mais pour $p_n = x^n$ alors $p_n \in D$ mais pour $m \neq n, \|p_m - p_n\|_1 = 1$ donc pas de sous-suite CV.

On a en fait un résultat général:

Théorème 17 (de Piesse): Un EVN E est de dimension finie si sa boule unité fermée est compacte. DEV 1

Corollaire 18: Dans un EVN de dimension infinie, tous les compacts sont d'intérieurs vides.

II Calcul différentiel

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -EVN de dimension finie, U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f: U \rightarrow F$.

1) Différentielle et dérivées partielles [600] [ELA]

Def 19: On dit que f est différentiable en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que: $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$. Si φ existe, f est unique et s'appelle la différentielle de f en a . On la note $df(a)$.

Remarque 20: En dimension quelconque, $df(a)$ dépend uniquement de f en a et F . Le n'est pas le cas en dimension finie.

De même, $df(a)$ doit être continue, ce qui est automatique en dimension finie.

Exemple 21: Si f est linéaire et continue, alors f est différentiable sur E et $df(a) = f \quad \forall a \in E$.

Def 22: Soit $v \in E$ et $a \in U$. On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si l'application g it $g(t) = f(a+tv)$ est dérivable en 0. On note alors:

$$\frac{df}{dv}(a) = D_v f(a) = f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Prop 23: Si f est différentiable en a , alors f admet une dérivée en a suivant tout vecteur $v \in E$ et on a:

$$\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v)$$

On prend désormais $E = \mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \dots, f_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Def 24: Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i si f est dérivable en a selon le vecteur e_i . On note $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Prop 25: Si f est différentiable en a , alors les n dérivées partielles en a existent et $i, h = \sum_{k=1}^n h_k e_k$ alors:

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Def 26: Soit $p = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $p' = (e'_1, \dots, e'_n)$ base de F . Soit $f = f_1 e'_1 + \dots + f_n e'_n$. Si f est différentiable en a , on appelle matrice jacobienne de f en a la matrice de $df(a)$ dans les bases p et p' . On la note $Jac f(a)$ et

comme $df(a)(e_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) e'_j$ alors:

$$Jac f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

2) Recherche d'extremums [ELA]

Def 27: On dit que f est deux fois différentiable en a si f est différentiable sur un voisinage de a et si df est elle-même différentiable en a .

La différentielle seconde $d(df(a))$ s'identifie à une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F notée $d^2 f(a)$.

Théorème 28 (de Schwarz): Soit f deux fois différentiable en $a \in U$. Alors: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$

On suppose que $F = \mathbb{R}$.

Def 29: Soit f deux fois différentiable en a . La matrice $Hess f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice hessienne de f en a .

Remarque 30: La matrice hessienne est symétrique.

Def 31: Soit f différentiable en a . On dit que f admet un point critique en a si $df(a) = 0$.

Prop 32: Soit f différentiable en a . Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique.

Contre-ex 33: pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum.

Prop 34: Si f admet un minimum local en a et que f est deux fois différentiable en a , alors $df(a) = 0$ et $d^2 f(a)(h, h) > 0 \quad \forall h \in E$.

Prop 35: Soit f deux fois différentiable et a un point critique de f . Si $d^2 f(a)(h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0$, alors f admet en a un minimum local strict.

2

III Equations différentielles linéaires

1) Structure de l'ensemble des solutions [BER]

Déf 36: On dit que l'équation $y' = f(t, y)$ est une équation différentielle linéaire si: $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où A et B sont des fonctions du temps à valeurs respectives dans $M_n(K)$ et K^n , avec $(t, y) \in I \times K^n$ où I intervalle de $\mathbb{R}$.

si: $B=0$, on parle d'équation différentielle linéaire homogène.

On note (Y) l'EDO linéaire $y' = A(t)y + B(t)$ et (Y_H) l'équation homogène associée.

Théorème 37 (de Cauchy-Lipschitz linéaire): Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$ et $B \in \mathcal{C}(I, K^n)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^n$. Alors il existe une solution et une seule $y: I \rightarrow K^n$ de (Y) tel que $y(t_0) = y_0$.

DEV 2

Prop 38: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Alors: 1) L'ensemble S_H des solutions de (Y_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, K^n)$

2) $\forall t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0}: S_H \rightarrow K^n$ tel que $\Phi_{t_0}(y) = y(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3) S_H est de dimension n .

Corollaire 39: Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$ et $B \in \mathcal{C}(I, K^n)$. Alors l'ensemble des solutions S de (Y) est un K -espace affine de dimension S_H .

Exemple 40: Les solutions de l'EDO linéaire $y'' - 2y' + y = 0$ sont les $y(t) = a e^t + b t e^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

2) Matrice fondamentale et wronskien [BER]

Déf 41: Un système fondamental de solutions de (Y_H) est une famille $(y_1, \dots, y_n)$ de n solutions indépendantes de (Y_H) . La matrice $\Phi(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ constituée de ces n solutions éécrites comme des vecteurs colonnes, est appelée une

matrice fondamentale de (Y_H) .

Le déterminant de $\Phi(t)$ est appelé wronskien de ce système fondamental.

Exemple 42: Dans l'exemple 40, une matrice fondamentale est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & (t+1)e^t \end{pmatrix}$ et le wronskien est: e^{2t} .

Prop 43: Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Soit $\Phi \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Alors $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale pour (Y_H) si:

- 1) Φ est dérivable sur I
- 2) $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad \forall t \in I$
- 3) $\Phi(t)$ est inversible $\forall t \in I$.

Prop 44: Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (Y_H) . Alors les solutions de (Y_H) s'écrivent $y(t) = \Phi(t).C \quad \forall t \in I$ avec $C \in K^n$.

Corollaire 45: Soit $y_0 \in K^n$ et $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (Y_H) . La solution de (Y_H) tel que $y(t_0) = y_0$ s'écrit: $y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 \quad \forall t \in I$

Exemple 46: La solution de l'exemple 40 tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est: $y(t) = (t+1)e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Prop 47 (identité d'Abel): Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (Y_H) . Alors le wronskien $W(t)$ associé à $\Phi(t)$ vérifie:

$$W'(t) = \text{Tr}(A(t)) \cdot W(t)$$