

34 Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

I. Notion de complétude

1. Suites de Cauchy [HAS]

Suite de Cauchy, prop, exemple suite de Cauchy non convergente

2. Espaces complets [HAS]

Espace complet, exemples, prop, produit d'espaces complets

II. Exemples d'espaces complets

1. Espaces de Banach [GOU]

Banach, exemples($\mathcal{L}_c(E, F)$, dual topologique, fonctions bornées, fct continues sur un compact), toute série ACV est CV, exponentielle de matrice

2. Espaces L^p [BRI] [LI]

$\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$, inégalité de Young-Holder-Minkowski, L^p et L^∞ , ce sont des EVN, théorème de Riesz-Fisher

3. Espaces de Hilbert [LI] [BMP]

Espace de Hilbert, identité du parallélogramme

DEV 2 : Projection sur un convexe fermé + corollaire sur P_C

Projection sur un SEV fermé, corollaires avec l'orthogonal, théorème de représentation de Riesz, adjoint, gradient

III. Utilisation de la complétude

1. Prolongement d'applications [HAS]

Deux théorèmes de prolongement

2. Théorème de point fixe [QUE] [BER]

DEV 2 : théorème du point fixe de Banach-Picard et théorème du point fixe itéré

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, théorème de Cauchy-Lipschitz

Présentation :

- L'utilité des suites de Cauchy dans les espaces complets est qu'elles permettent de démontrer qu'une suite converge ou non, sans avoir besoin de connaître la limite.
- La complétude d'un espace dépend de la distance. Par exemple $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est complet, mais si on le munit de $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, alors la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $(\mathbb{R}, d)$ mais ne converge pas.
- Le fait que tout EVN de dimension finie est complet est dû au fait qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes et qu'ainsi les compacts sont les fermés-bornés.
- Sur $\mathcal{L}^p$, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme. C'est pour cette raison que l'on introduit L^p .
- Les espaces de Hilbert sont une généralisation des espaces euclidiens/hermitiens en dimension infinie. Ils permettent d'utiliser de nombreux outils géométriques.
- On peut se demander si tout EVN est un espace préhilbertien, c'est-à-dire si l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur H , est ce que l'on peut définir un produit scalaire tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. En fait, une norme sur un EV est issue d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.

- Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, la caractérisation du projeté exprime que $P_C(x)$ est l'unique point y de C tel que pour tout $z \in C$, l'angle formé par les vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (supérieur ou égal à $\pi/2$).
- La conclusion du théorème de projection reste vraie si l'on suppose seulement que H est un espace préhilbertien et que le convexe C est complet pour la distance induite.
- Le théorème du point fixe itéré apparaît de manière cruciale dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, car on se ramène à un problème de point fixe.

Développements :

- Théorème de projection sur un convexe fermé + corollaire sur P_C
- Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI, p32
- Théorème du point fixe de Banach-Picard et théorème du point fixe itéré
- Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et probabilités, Dantzer, p146
- Topologie, Queffélec p185

Références :

- [HAS] Topologie générale et espaces normés, Hage Hassan
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré
- [QUE] Topologie, Queffélec
- [BER] Equations différentielles, Berthelin

Leçon 205: Espaces complets. Exemples et applications

Soit (X, d) un espace métrique.

1) Suites de Cauchy [HAS]

Def 1: Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans (X, d) est dite de Cauchy si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m, n > n_0, d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Prop 2: 1) Toute suite convergente dans X est de Cauchy.

2) Toute suite de Cauchy dans X est bornée.

3) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Exemple 3: La suite de terme général $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy.

Prop 4: Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans X . Alors cette suite est convergente ssi elle possède une sous-suite convergente. Cette valeur d'adhérence est alors unique, c'est la limite de la suite.

Prop 5: L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.

Centre-exc 6: Soit $X =]0, +\infty[$, la suite définie par $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans X mais n'est pas convergente dans X .

2) Espace complet [HAS]

Def 7: On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

Exemple 8: Les espaces $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ et $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ sont complets.

L'espace $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ n'est pas complet car par exemple si $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ alors (x_n) est $\mathbb{Q}$ valeurs dans $\mathbb{Q}$ mais converge vers $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prop 9: Soit A un sous-ensemble de (X, d) .

1) Si A est complet, alors A est fermé dans X .

2) Si A est dense dans X et $A \neq X$, alors A n'est pas complet.

3) Si (X, d) est complet et A est fermé dans X , A est complet.

Prop 10: Soit $(x_1, d_1), \dots, (x_p, d_p)$ des espaces métriques. Alors $X = x_1 \times \dots \times x_p$ est complet ssi (x_i, d_i) est complet pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Corollaire 11: Soit $m \geq 1, \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{C}^m$ sont complets.

Prop 12: Tout espace métrique compact est complet.

II Exemples d'espaces complets

1) Espaces de Banach [600]

Def 13: Un espace vectoriel normé $\overline{V}$ s'appelle un espace de Banach.

Notations 14: Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On note $B(X, Y)$ l'ensemble des applications bornées de X dans Y .

$\bullet C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y .

$\bullet C_b(X, Y) = B(X, Y) \cap C(X, Y)$

Exemple 15: Soit $f \in B(X, \mathbb{R})$, On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Norme de cette norme, $B(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Prop 16: Tout EVN de dimension finie est un espace de Banach.

Prop 17: On munit $\mathcal{L}_c(E, F)$ de la norme $\| \cdot \|$ définie par $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \quad \forall f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ aussi.

Application 18: Le dual topologique $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ de E est un espace de Banach.

Prop 19: Un EVN E est complet ssi toute série $\sum_{n \geq 0} x_n$ absolument convergente est convergente.

Prop 20: Soit E un espace de Banach et $m \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|m\| < 1$. Alors id- m est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} m^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

Application 27: L'exponentielle matricielle est bien définie.

2) Espaces L^p [BRI][Li]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Déf 22: Soit $p \geq 1$. On définit les espaces L^p par:

$$L^p = \left\{ f : (x, t) \mapsto (K, \mathcal{B}(K)) \text{ mesurable; } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Et on note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables tel que

$$\|f\|_0 = \inf\{M > 0; f(|f| > M) = 0\} < +\infty.$$

Prop 23: Pour $p \in [1, +\infty]$, L^p est un K -espace vectoriel.

Notation 24: Pour $f \in \mathcal{L}^p$, on note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

Prop 24 (inégalité de Young): Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{Alors: } \forall u, v \in \mathcal{L}^1, \quad \|u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{p} \|u\|_p + \frac{1}{q} \|v\|_q.$$

Prop 25 (inégalité de Hölder): Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son

exposant conjugué. Soit $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$. Alors

$$fg \in \mathcal{L}^1 \text{ et: } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Prop 26 (inégalité de Minkowski): Soit $p \in [1, +\infty]$ et

$$f, g \in \mathcal{L}^p. \text{ Alors: } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Remarque 27: $\|f\|_p = 0$ ssi $f = 0$ μ -presque partout, donc

$\| \cdot \|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$.

Déf 28: Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$ où

$\sim$ est la relation d'équivalence d'égalité presque partout.

Ainsi $(L^p, \| \cdot \|_p)$ est un K -espace vectoriel normé.

Corollaire 26 bis: Si $\mu(X) < +\infty$, alors pour $1 \leq p_1 \leq p_2 < +\infty$

$$\text{on a: } \mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^1$$

Théorème 29 (de Riesz-Fischer): Pour tout $p \in [1, +\infty]$,

L^p muni de $\| \cdot \|_p$ est un espace de Banach.

3) Espaces de Hilbert [Li][BMP]

Déf 30: Un K -espace vectoriel H est un espace de Hilbert

si il est préhilbertien et est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Exemple 31: 1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

2) $L^2(\mu)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t)$ est un Hilbert.

Lemme 32 (identité du parallélogramme): pour tous $x, y \in H$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Théorème 33 (de projection sur un convexe fermé):

Soit H un Hilbert et C une partie convexe fermée non

vide de H . Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique

$$z \in C \text{ tel que: } \|x-z\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$$

On dit que $z = p_C(x)$ est la projection de x sur C .

Il est caractérisé par la propriété:

$$z \in C \text{ et } \operatorname{Re} \langle x-z, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$$

DEV 1

Corollaire 34: L'application $p_C: H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

Théorème 35: Soit F un SEV fermé de l'espace de Hilbert H , alors $p_F: H \rightarrow F$ est linéaire continue et $p_F(x)$ est

l'unique point $z \in F$ tel que: $z \in F$ et $x-z \in F^\perp$.

Corollaire 36: Pour tout SEV fermé F de H un Hilbert,

$$\text{on a: } H = F \oplus F^\perp.$$

Corollaire 37: Pour tout SEV F de H un Hilbert, on a:

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Corollaire 38: Soit H un Hilbert et F SEV de H . Alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 39 (de représentation de Riesz): Soit H un

Hilbert. Pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $z \in H$

$$\text{tel que } \phi(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H.$$

Prop 40: Soit H un Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il

existe $T^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé adjoint de T , tel que:

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \quad \forall u, v \in H. \text{ De plus: } \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Application 41: Soit H un Hilbert et $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in H$. Comme $df(a) \in H'$, il existe un unique vecteur de H , noté $\nabla f(a)$ et appelé "gradient" de f en a , tel que: $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in H$.

III Utilisation de la complétude

1) Prolongement d'applications [HAS]

Théorème 42: Soit (X, d) et (Y, δ') des espaces métriques. Soit A une partie dense de X et $f: A \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Si (Y, δ') est complet, f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f}: X \rightarrow Y$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Contre-ex 43: Soit $X = [0, 1]$, $A =]0, 1[$ et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Alors A est dense dans X , $\mathbb{R}$ est complet, et f est continue, mais f ne se prolonge pas par continuité sur X . Ainsi f n'est pas uniformément continue sur A .

Théorème 44: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $(F, \|\cdot\|')$ un espace de Banach. Soit H un SEV dense dans E et $f \in \mathcal{L}_c(H, F)$. Alors il existe un unique $g \in \mathcal{L}_c(E, F)$ prolongeant f . De plus, $\|g\| = \|f\|$.

2) Théorème de point fixe [QUE] [BER]

Def 45: Soit X, Y deux espaces métriques et $k \in [0, 1[$. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite k -contractante si: $\delta'(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Théorème 46 (de point fixe de Banach-Picard): Soit (E, d) un espace métrique complet et $f: E \rightarrow E$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme $\{x_n \in E\}_{n \geq 1}$ est convergente vers ce point fixe.

DEV 2

est convergente vers ce point fixe.

Contre-ex 47: $\forall$ -hypothèse de complétude sur E est importante. Par exemple si $f(x) = \frac{x}{2}$, alors f est une $\frac{1}{2}$ -contraction de $[0, 1]$ dans lui-même mais n'admet pas de point fixe dans $]0, 1[$.

Corollaire 48 (théorème de point fixe abstrait): Soit (E, d) un espace métrique complet, $p \in \mathbb{R}^+$ et $f: E \rightarrow E$ tel que f soit contractante. Alors f admet un unique point fixe, et toute suite de la forme $\{x_n \in E\}_{n \geq 1}$ est convergente vers ce point fixe.

DEV 2

Application 49 (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire):

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(I, \mathcal{M}(K))$ et $B \in \mathcal{L}(I, K^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^N$. Alors il existe une solution et une seule $\gamma: I \rightarrow K^N$ de $\gamma' = A(t)\gamma + B(t)$ avec $(t, \gamma(t)) \in I \times K^N$ tel que $\gamma(t_0) = y_0$.

Application 50 (théorème de Cauchy-Lipschitz): Soit α un arc de $\mathbb{R} \times K^N$ et $f: \alpha \rightarrow K^N$ continue dans toutes les variables et localement lipschitzienne par rapport à la variable t -état. Soit $(t_0, y_0) \in \alpha$. Alors il existe une solution maximale et une seule $\gamma: I \rightarrow K^N$ de $\gamma' = f(t, \gamma)$ avec $(t, \gamma(t)) \in \alpha$ tel que $\gamma(t_0) = y_0$.

3