

33 Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications.

I. Espaces connexes

1. Définitions et propriétés [HAS]

Ensemble connexe, équivalence des defs, fonction continue, connexes de $\mathbb{R}$

2. Stabilité de la connexité [HAS] [HAU] [GOU]

Prop avec les unions, intersections, adhérence, contre-exemples, produit de connexes

II. Raffinement de la connexité

1. Composantes connexes [HAS]

Composantes connexes, propriétés, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjoint d'intervalles

2. Connexité par arcs [GOU] [HAS]

Chemin, CPA, sinus du topologue, DEV 1 : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs, réciproque ouvert connexe implique CPA

III. Applications de la connexité

1. Analyse réelle [GOU]

TVI, polynôme de degré impair, point fixe, théorème de Darboux

2. Analyse complexe [LES]

DEV 2 : principe du prolongement analytique, principe des zéros isolés, intégrité de $\mathcal{H}(\Omega)$, fonction carac de la loi gamma

Présentation :

- Intuitivement, un espace est connexe s'il est d'un seul tenant, on ne peut pas le séparer en plusieurs morceaux distincts.
- La notion de connexité est une notion topologique : elle ne dépend pas de la distance et l'on peut donc la présenter dans un espace topologique général.
- Les composants connexes peuvent être vues comme les « morceaux » connexes d'un espace qui n'est pas connexe. C'est une notion qui est donc utile lorsque l'espace n'est pas connexe.
- La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer la connexité.
Intuitivement, un espace est connexe par arcs si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe sans lever le stylo. Cette notion est ainsi très visuelle.
- Pour montrer qu'un espace est connexe par arcs, il peut être judicieux de montrer qu'il est étoilé par rapport à un point précis, qui en général est assez simple (par exemple I_n pour les matrices).
- Un résultat important est que l'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe, on retrouve alors le TVI dans $\mathbb{R}$.

Développements :

- $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs.
- Carnet de voyage en Algèbre, Caldero-Peronnier, p143
- Principe du prolongement analytique et théorème des zéros isolés
- Topologie générale et espaces normés, Hage Hassan, p233

- Variables complexes, Lesfari, p62
- Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel, p52

Références :

- [HAS] Topologie générale et espaces normés, Hage Hassan
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Hauchecorne
- [LES] Variables complexes, Lesfari

Leçon 204: Connexité. Exemples d'applications

Dans toute la suite, on considère (X, d) un espace métrique.

I Espaces connexes

1) Définitions et propriétés [HAS] [GOU]

Déf 1: On dit que X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints: $X = U \cup V$ avec U et V ouverts, alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Prop 2: On a équivalence entre:

- 1) X est connexe
- 2) X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.
- 3) X et $\emptyset$ sont les seuls ouverts-fermés.
- 4) Toute application continue de X dans $\mathbb{R}$ est constante.
- 5) Toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

Exemple 3: L'ensemble vide et tout singleton de X sont connexes.

Contre-ex 4: $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe car $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$

$\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$ car

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[\cup \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[$$

Prop 5: Soit (Y, d') un espace métrique et $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Prop 6: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

Contre-ex 7: Soit $f: x \mapsto x^2$, qui est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $I = [1, +\infty[$ est connexe. Or $f^{-1}(I) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ qui n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

2) Stabilité de la connexité [HAS] [HAU] [GOU]

Prop 8: Soit A une partie connexe de X . Si U et V sont des ouverts (resp fermés) disjoints de X tel que $X = U \cup V$, alors on bien $A \subset U$ ou bien $A \subset V$.

Prop 9: Soit $A, B \subset X$. Si A est connexe et que $A \cap B \neq \emptyset$, alors B est connexe.

Corollaire 10: L'adhérence de tout connexe de X est connexe. • Il existe une partie connexe et dense dans X , alors X est connexe.

Contre-ex 11: Une union de connexes n'est pas forcément connexe: si $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$ alors A et B sont connexes mais pas $A \cup B$

Prop 12: Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de X , tel que: $\exists i_0 \in I, v_i \in I, C_{i_0} \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Remarque 13: Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes telle $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Contre-ex 14: Une intersection de connexes n'est pas forcément connexe: soit $f: t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est continue et $\mathbb{R}$ est connexe donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ est connexe. Or $\mathbb{R}$ est connexe mais $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \{0, 1\}$ n'est pas connexe.

Prop 15: Soit $(x_n, d_n), \dots, (x_n, d_n)$ des espaces métriques. Alors $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ est connexe ssi X_n est connexe pour tout n .

Corollaire 16: $\mathbb{R}^n$ est connexe pour tout $n \geq 1$.

II Raffinement de la connexité

1) Composantes connexes [HAS] [GOU]

Déf 17: On définit sur X la relation R par: $(x, y) \in R \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } X \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C)$

C'est une relation d'équivalence.

Déf 18: Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les composantes connexes de X .
Pour $x \in X$, on note C_x la composante connexe qui le contient.

Remarque 19: X est la réunion disjointe de ses composantes connexes. Ainsi X est connexe ssi il n'y a qu'une seule composante connexe.

Exemple 20: $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes qui sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Prop 21: 1) C_x est la réunion des ensembles connexes de X contenant x . C'est la plus grande partie connexe de X contenant x .

2) Les composantes connexes sont connexes et fermées dans X .
3) Si X possède un nombre fini de composantes connexes, alors elles sont ouvertes dans X .

Prop 22: Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

2) Connexité par arcs [GOU] [HAS]

Déf 23: On appelle chemin de X toute application $\gamma: [0, 1] \rightarrow (X, d)$ continue. L'image $\gamma([0, 1])$ s'appelle un arc, $\gamma(0)$ est l'origine et $\gamma(1)$ l'extrémité.

Déf 24: On dit que X est connexe par arcs si pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin de X d'origine x et d'extrémité y .

Prop 25: Si X est connexe par arcs et f est une application continue, alors $f(X)$ est connexe par arcs.

Prop 26: Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Contre-ex 27: La réciproque est fautive. On peut regarder

dans $\mathbb{R}^2$, $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; x \in]0, 1[\} \cup \{0\} \times [-1, 1[$.

$$X = A \cup (\{0\} \times [-1, 1[)$$

Alors X est connexe car A l'est et $A \cap C \neq \emptyset$.

Mais X n'est pas connexe par arcs.

Prop 28: $C_L(\mathbb{R})$ est dense, ouvert et connexe par arcs (donc connexe). DEV 1

Prop 29: Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Alors U est connexe ssi U est connexe par arcs.

III Applications de la connexité

1) Analyse réelle [GOU]

Théorème 30 (des valeurs intermédiaires): Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 31: Autrement dit, si $f(a) \leq f(b)$ avec $a < b$, alors pour tout γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 32: Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.

Théorème 33 (de Darboux): Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ (mais pas forcément de classe C^1). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 34: Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ possède un point fixe.

Théorème 35: Soit (x, d) un espace compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est un connexe de X .

Application 36: Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue, et $(x_n)_n$ une suite définie par

$x_{n+1} = f(x_n) \forall n \geq 0$ et $x_0 \in [0, 1]$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 0$, alors la suite (x_n) converge.

DEV 2

2) Analyse complexe [ES]

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$

Théorème 37 (principe du prolongement analytique): Soit $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On a équivalence entre :

- 1) f est identiquement nulle sur U
- 2) f est identiquement nulle dans un voisinage de a .
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$

Corollaire 38: Soit $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Si f et g coïncident sur un voisinage d'un point de U , alors $f \equiv g$ sur U .

Théorème 39 (principe des zéros isolés): Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés. Autrement dit, l'ensemble des zéros de f dans U est discret.

DEV 2

Corollaire 40: L'anneau $\mathcal{H}(U)$ est intègre.

Corollaire 41: Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ tel que l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans U . Alors f est identiquement nulle sur U .

Application 42: La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(n, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.