

32 Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité

I. Notion de compacité

1. Propriété de Borel-Lebesgue [GOU]

Déf avec les recouvrements, équivalence avec les intersections de fermés, prop pour la réunion et l'intersection de compacts

2. Propriété de Bolzano-Weierstrass [GOU]

Théorème de Bolzano-Weierstrass, compact $\Rightarrow$ fermé-borné, compacts de $\mathbb{R}$, produit de compacts

II. Compacité et fonctions continues

1. Extremas [GOU]

Image d'un compact, théorème des bornes atteintes, distance à un compact, lemme de Rolle, TAF

2. Théorèmes d'uniformité [SKA] [GOU] [ELA]

DEV 1 : théorème de Heine + 2 applications, théorèmes de Dini, polynômes de Bernstein, théorème de Weierstrass

3. Théorèmes de point fixe [GOU]

Deux théorèmes de point fixe sur un compact

III. Compacité dans un espace vectoriel normé de dimension finie [GOU] [IP]

DEV 2 : équivalence des normes en dimension finie, tous les corollaires avec des contre-exemples, DEV 2 : théorème de Riesz

Présentation :

- La compacité est une propriété très utile, qui permet par exemple de transporter des propriétés locales à des propriétés globales.
- Lorsque l'on manipule des ensembles compacts, il faut savoir jongler entre les deux définitions (Borel-Lebesgue et Bolzano-Weierstrass) en fonction du contexte.
- La compacité ne marche pas bien avec l'image réciproque par une application continue : prendre une application constante définie sur $\mathbb{R}$.

Développements :

- Théorème de Heine + 2 applications
 - Topologie et analyse 3e année, Skandalis, p121
- Equivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz
 - Analyse, Gourdon, p51
 - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p422

Références :

- [GOU] Analyse, Gourdon
- [SKA] Topologie et analyse 3e année, Skandalis
- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte

Leçon 203: Utilisation de la notion de compacité

Soit (E, d) un espace métrique.

I Notion de compacité

1) Propriété de Borel-Weierstrass [60V]

Def 1: On dit que (E, d) est compact si de tout recouvrement de E par des ouverts de E , on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts $\forall i \in I$, il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Exemple 2: Tout espace métrique fini est compact

Contre-ex 3: $\mathbb{R}$ n'est pas compact

Prop 4: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers l . Alors $\mathcal{N} = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Prop 5: Un espace métrique compact est borné.

Prop 6: (E, d) est compact si de toute intersection vide de fermés de E , on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Corollaire 7: Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact E , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Prop 8: Une réunion finie de parties compactes est compacte.

Prop 9: Une intersection de compacts est compacte.

2) Propriété de Bolzano-Weierstrass [60V]

Théorème 10 (de Bolzano-Weierstrass): (E, d) est compact si de toute suite de points de E , on peut en extraire une sous-suite convergente dans E .

Prop 11: 1) Si E est compact et A est une partie fermée de E , alors A est compacte.

2) Si A est compact dans E , A est fermé et borné.

Théorème 12: Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les fermés-b bornés.

Prop 13: Un espace compact est complet.

Prop 14: Dans un compact, une suite converge si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Prop 15: Soit $E_1, \dots, E_n$ un nombre fini d'espaces métriques. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est compact si E_i est compact $\forall i$.

Corollaire 16: Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés-bornés.

II Compacité et fonctions continues

1) Extremums [60V]

Prop 17: Soit (E, d) compact et (F, δ) un espace métrique. Soit $f: E \rightarrow F$ continue. Alors $f(E)$ est compact.

Contre-ex 18: La compacité est locale, par exemple $\arctan\left(\frac{1-\frac{\pi}{2}}{x}\right); \frac{\pi}{2} \subset \mathbb{R}$.

Théorème 19 (des bornes atteintes): Soit $f: (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, où (E, d) est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tel que: $f(c) = \inf_{x \in E} f(x)$ et $f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$.

Remarque 20: Complète avec le théorème des valeurs intermédiaires, on observe que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'image d'un intervalle fermé borné par f est un intervalle fermé borné.

Corollaire 21: Soit K_1 et K_2 deux compacts de E . Alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tel que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$. En particulier, si $x_0 \in E$, alors la distance de x_0 à K_2 est atteinte.

Lemme 22 (de Rolle): Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

- 1) f est continue sur $[a, b]$
- 2) f est dérivable sur $]a, b[$.
- 3) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 23 (des accroissements finis): Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors:

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 24: Soit f vérifiant les mêmes hypothèses. Alors f est croissante ssi $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

2) Théorèmes d'uniformité [SKA][GOU][ELA]

Théorème 25 (de Heine): Toute application continue d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est uniformément continue.

Corollaire 26: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

DEV 1

Application 27: Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorèmes 28 (de Dini):

- 1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I , alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .
- 2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles définies sur un compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I , alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Def 29: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f , le polynôme:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Prop 30: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors la suite de fonctions $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème 31 (de Weierstrass): Toute fonction f continue sur un compact $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Application 32: Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f \equiv 0$.

3) Théorèmes de point fixe [GOU]

Théorème 33: Soit (E, d) un espace métrique compact et $f: E \rightarrow E$ une application vérifiant:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Alors f admet un unique point fixe.

Centre-ex 34: Le résultat est faux si E est seulement

complet; prendre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = 1$ si $x < 0$ et

$$f(x) = x + \frac{1}{1+x} \quad \text{si } x \geq 0.$$

Théorème 35: Soit K un compact convexe d'un $\mathbb{R}^n$ et $f: K \rightarrow K$ continue tel que:

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

Alors f admet au moins un point fixe.

Remarque 36: Le théorème de Brouwer dit que toute

application continue d'un convexe compact dans lui-même admet au moins un point fixe.

III Compacité dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 37: Dans un EVN de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

DEV 2

Contre-ex 38: C'est faux en dimension infinie. Prendre (cet triangle)

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \max(1-nx, 0)$$

avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Corollaire 39: Toute application linéaire d'un EVN de dimension finie dans un EVN quelconque est continue.

Contre-ex 40: C'est faux en dimension infinie. Prendre $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_\infty = \sup |a_i|$. Alors $P \mapsto P'$ est linéaire mais pas continue (prendre X^n)

Corollaire 41: Tout EVN de dimension finie est complet.

Corollaire 42: Tout SEV de dimension finie d'un

EVN est fermé.

Exemple 43: L'exponentielle matricielle est un polynôme en la matrice : $e^A \in K[A]$.

Corollaire 44: Les parties compactes d'un EVN de dimension finie sont les parties fermées, bornées.

Exemple 45: $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^T A = I_n\}$ est compact.

Contre-ex 46: C'est faux en dimension infinie. Prendre

$E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_\infty = \sup |a_i|$. Alors $B = \{P \in E; \|P\|_\infty \leq 1\}$ est fermé borné. Mais pour $P_n = X^n$ alors $P_n \in B$ mais $\forall n \neq m, \|P_n - P_m\|_\infty = 1$ donc pas de sous-suite CV.

On a en fait un résultat général:

Théorème 47 (de Heine): Un EVN est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Application 48: Dans un EVN de dimension infinie, tout compact est d'intérieur vide.