

31 Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I. Espaces de fonctions continues

Cadre

1. Espace des fonctions bornées [ELA]

Fonction bornées, $\|\cdot\|_\infty$, CVU, critère de Cauchy uniforme, $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach

2. Espace des fonctions continues sur un compact [ELA] [GOU] [SKA]

CVU et continuité, TBA, théorème de Heine + 2 applications, $\mathcal{C}(X, E)$ est un Banach

3. Densité [ELA] [GOU]

Polynômes de Bernstein, DEV 1 : théorème de Weierstrass, application, théorème de Weierstrass trigonométrique

II. Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

1. Espaces $\mathcal{L}^p$ [KUR] [FAR]

Espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$, DEV 2 : inégalité de Young-Hölder-Minkowski, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme, contre-exemple avec $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

2. Espaces L^p [FAR] [KUR]

Relation d'équivalence, espaces L^p , $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un EVN, inclusion des L^p , contre-exemple, théorème de Riesz-Fischer, densité des fonctions étagées

3. Convolution dans L^1 [ELA2]

Produit de convolution, exemple fonction porte, cas $L^1 - L^1$, $(L^1, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre commutative munie de $*$

4. Transformée de Fourier dans L^1 [ELA2] [FAR]

Transformée de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue, transformation de Fourier, exemples, lien avec la convolution, formule de dualité, formule d'inversion, injectivité

Présentation :

- Le théorème de Weierstrass permet d'approcher de façon globale et uniforme des fonctions par des polynômes, qui sont des objets très réguliers et facile à manipuler.
- Sur $\mathcal{L}^p$, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme. C'est pour cette raison que l'on introduit L^p . On confondra toujours une fonction $f \in \mathcal{L}^p$ et sa classe dans L^p .
- On observe que le produit de deux fonctions dans L^1 n'est pas forcément dans L^1 . L'idée du produit de convolution est d'avoir une opération qui fait de L^1 une algèbre.

Développements :

- Théorème de Weierstrass par les probabilités
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p195
 - Oraux X-ENS 6, FGN, p259
 - Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani, p158
- Inégalité de Young-Hölder-Minkowski
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman, p209
 - Éléments d'analyse réelle, Rombaldi, p239 et 39

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [SKA] Topologie et analyse 3e année, Skandalis
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [ELA2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Devoir 201: Espaces de fonctions. Exemples et applications

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espace de fonctions continues

Soit X un ensemble et E un K -espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E et $f: X \rightarrow E$.

1) Espace des fonctions bornées [ELA]

Notation 1: On note $B(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E .

Déf 2: Pour $f \in B(X, E)$, on définit la norme de la convergence uniforme donnée par:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

Prop 3: L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur $B(X, E)$, ce qui fait de $B(X, E)$ un EVN.

Prop 4: Une suite $(f_n)_n$ de $B(X, E)$ converge uniformément sur X vers f ssi $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Prop 5: Si (f_n) est une suite de $B(X, E)$ qui converge uniformément vers f , alors $f \in B(X, E)$.

Théorème 6 (critère de Cauchy uniforme): Soit E complet.

Alors la suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente

ssi: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \forall x \in X,$

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \epsilon.$$

Théorème 7: Si E est un espace de Banach, alors $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

2) Espace des fonctions continues sur un compact [S00]

Prop 8: Soit $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f . Si les f_n sont toutes continues en $a \in X$, alors f est continue en a .

On suppose ici que X est un compact.

Prop 10: Soit $f: X \rightarrow E$ continue. Alors $f(X)$ est compact.
Notation 11: On note $\mathcal{C}(X, E)$ l'espace des applications continues de X dans E .

Théorème 11 (des bornes atteintes): Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes: il existe $c, d \in X$ tel que $f(c) = \inf_{x \in X} f(x)$ et $f(d) = \sup_{x \in X} f(x)$.

Théorème 12 (de Heine): Toute application continue d'un compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.

Application 13: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors:
$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$$

Application 14: Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 15: Soit E complet. Alors $\mathcal{C}(X, E)$ est un pluri de $B(X, E)$. Ainsi $\mathcal{C}(X, E)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Exemple 16: Soit $a \leq b$. Alors $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ sont complets munis de $\|\cdot\|_\infty$.

3) Densité [ELA] [600]

Déf 17: Soit $f: [0, 1] \rightarrow K$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f , le polynôme $B_n(f)$ défini par: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$

Prop 18: Soit $f: [0, 1] \rightarrow K$. Alors la suite des polynômes de Bernstein associés à f converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème 19 (de Weierstrass): Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$, à valeurs dans K , est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômiques.

(contre-ex avec $f(x) = \sin(x)$)

Remarque 20: Les fonctions polynomiales sont denses dans $(C([a, b], K), \|\cdot\|_\infty)$

Application 21: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$. Alors $f \equiv 0$.

Déf 22: On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire d'éléments de la famille $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Théorème 23 (de Weierstrass trigonométrique): Toute fonction continue et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

Remarque 24: Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

II Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

1) Espaces L^p [KUR] [FAR]

Déf 25: Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$.

On note alors $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$.

On note $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\|f\|_\infty < +\infty$ où $\|f\|_\infty = \inf \{ M \in \mathbb{R} ; \mu(\{x \in X ; |f(x)| > M\}) = 0 \}$.

Prop 26 (Inégalité de Young): Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors $\forall f, g \in L^p_+ \cap L^q_+$, $\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \|f\|_p + \frac{1}{q} \|g\|_q$

Théorème 27 (Inégalité de Hölder): Soit $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors $fg \in L^1$ et :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

DEV 2

Théorème 28 (Inégalité de Minkowski): Soit $f \in L^p, 1 \leq p$.

Soit $1, g_1 \in L^p$. Alors $f+g \in L^p$ et :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Remarque 29: Les inégalités sont aussi vraies pour $p = +\infty$, avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$

Corollaire 30: Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'ensemble $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel, et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur celui-ci.

Centre-ex 31: On a $\|1_{A_2}\|_p = 0$ mais $A_2 \neq \emptyset$.

2) Espaces L^p [FAR] [KUR]

Prop 32: Soit $1, 2 \in L^p$. La relation $\sim$ définie par $1 \sim 2 \iff 1 = g \cdot 2 - p \cdot p$, est une relation d'équivalence sur L^p .

Déf 33: On définit les espaces L^p par $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim$.

Prop 34: Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 35: Soit p une mesure finie. Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors on a l'inclusion $L^q \subset L^p$.

Centre-ex 36: Si $p = \lambda$, alors $f \in L^\infty$ mais n'appartient à aucun L^p pour $p \in [1, +\infty[$.

Théorème 37 (de Riesz-Fischer): Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 38: $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$

Prop 39: Pour $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.

3) Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Déf 40: On dit que deux fonctions $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f et g par: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$.

Exemple 41: Soit $a \leq b$ et $f = \chi_{[a,b]}$ et $g = \chi_{[b,a]}$. Alors:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{si } |x| > b+a \end{cases}$$

Prop 42: Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution est commutatif et bilinéaire.

Théorème 43: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout x , l'application $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. La fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Prop 44: L'espace vectoriel muni $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ muni du produit de convolution est une algèbre de Banach commutative.

4) Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ [ELAR][FAR]

Déf 45: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, la fonction:

$$\hat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle x, \xi \rangle} dx$$

Lemme 46 (de Riemann-Lebesgue): On a $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Théorème 47: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$, avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. On appelle transformation de Fourier de f l'application $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$

Corollaire 48: La transformation de Fourier est une

application linéaire continue.

Exemple 49: Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$. Alors $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$.

Prop 50: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Remarque 51: Cela montre qu'il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 52: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $f * f = f$, alors $f = 0$.

Prop 53 (formule de dualité): Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors: $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) g(x) dx$.

Théorème 54 (formule d'inversion): Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i \langle x, \xi \rangle} d\xi$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$

Ainsi: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = (2\pi)^d f(-x)$

Corollaire 55: La transformation de Fourier est injective: si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ pp.