

42 Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

I. Théorie des équations différentielles linéaires

1. Généralités [BER]

Equa diff d'ordre n , solution, problème de Cauchy, formule intégrale, l'ordre n se ramène à l'ordre 1, équa diff linéaire, équa diff linéaire homogène

2. Structure de l'ensemble des solutions [BER]

DEV 1 : théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Structure de S_H , structure de S , exemple

3. Matrice fondamentale et wronskien [BER]

Système fondamental, matrice fondamentale, wronskien, équivalence matrice fondamentale, expression des solutions, expression explicite pour le problème de Cauchy, identité d'Abel pour le wronskien

II. Résolution explicite

1. Cas constant homogène [BER]

Exponentielle de matrice, prop, expression explicite des solutions, exemple

2. Variation de la constante [BER]

Méthode de variation de la constante, formule de Duhamel, exemple

3. Utilisation des séries entières [ELA]

Méthode avec les séries entières, exemple

DEV 2 : équation de Bessel

Présentation :

- Les équations différentielles interviennent dans de nombreux domaines notamment en physique. Cette importance justifie le développement de cette branche des mathématiques.
- Lorsque l'on parle d'une solution d'une équa diff, il est important de spécifier sur quel intervalle I cette fonction est solution.
- Une équa diff vectorielle d'ordre n en dimension N se ramène à une équa diff vectorielle d'ordre 1 en dimension nN . En particulier, une équa diff scalaire d'ordre n se ramène à une équa diff vectorielle d'ordre 1 en dimension n .
Cela justifie de se concentrer sur les équa diff d'ordre 1.
- On peut retenir de manière informelle que : solution générale de l'équa diff avec second membre = solution générale de l'équa diff homogène + solution particulière de l'équa diff avec second membre.
- Pour la résolution de systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, on est amené à calculer l'exponentielle d'une matrice. C'est alors que la théorie de la réduction est d'une grande aide. On va alors savoir le faire par exemple pour des matrices diagonales, diagonalisables, nilpotentes, ou si l'on dispose de la décomposition de Dunford.
- Lorsque l'on a une équation différentielle scalaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants, il suffit d'étudier les racines du polynôme caractéristique pour avoir la forme des solutions. On a 3 cas différents.

- Pour trouver une solution particulière d'une équa diff avec second membre, on la cherche avec une forme proche de celle du second membre.
- Au début de la théorie des équa diff, la méthode générale était de chercher le développement en série entière des fonctions inconnues recherchées. Cette méthode est toujours utilisée.

Développements :

- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
 - Equations différentielles, Berthelin, p30
 - Analyse pour l'agrégation, Bernis, p73
- Equation de Bessel
 - Oaux X-ENS Analyse 4, FGN, p101

Références :

- [BER] Equations différentielles, Berthelin
- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani

Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

Soit $N, m \in \mathbb{N}^*$ et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit Ω ouvert de $\mathbb{R} \times (K^m)^m$

I Equations différentielles linéaires

1) Généralités [BER]

Déf 1 : Soit $f: \Omega \rightarrow K^N$. On appelle équation différentielle d'ordre n dans K^N l'équation :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{pour } (t, y, \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega \quad (E_n)$$

Déf 2 : Une solution de (E_n) est un couple (I, γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma: I \rightarrow K^N$ n fois dérivable qui vérifie (E_n) .

Remarque 3 : Quand $n=1$, on parle d'équation différentielle scalaire.

Notation 4 : On a le cas fondamental où $n=1$:

$$\gamma' = f(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in \Omega, \quad t \in \Omega, \gamma \in K^N \quad (E)$$

Déf 5 : Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy avec données initiales (t_0, y_0) consiste à trouver les solutions γ de (E) sur I tel que $t_0 \in I$ et $\gamma(t_0) = y_0$.

Exemple 6 : La fonction $\gamma: t \mapsto 2e^{-t}$ est solution de $\gamma' + \gamma = 0$ avec $\gamma(0) = 2$.

Prop 7 : Soit $f: \Omega \rightarrow K^N$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $\gamma: I \rightarrow K^N$ est solution de (E) tel que $\gamma(t_0) = y_0$ ssi :

1) γ est continue

2) $\forall t \in I, (t, \gamma(t)) \in \Omega$

3) $\forall t \in I, \gamma(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds$

Prop 8 : En considérant $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ l'EDO d'ordre n dans K^N est équivalente à

l'EDO (E_1) d'ordre 1 dans K^{mN} suivante :

$$\gamma' = f(t, \gamma) \quad \text{avec } f(t, \gamma) = (y_1, y_2, \dots, y_{mN-1}, f(t, y))$$

Déf 9 : On dit que l'équation $\gamma' = f(t, \gamma)$ est une équation différentielle linéaire si $f(t, \gamma) = A(t)\gamma + b(t)$ où $A: \mathbb{R} \rightarrow M_N(K)$ et $b: \mathbb{R} \rightarrow K^N$.

Déf 10 : Dans le cas d'une EDO linéaire, si $b=0$, on parle d'EDO homogène (ou sans second membre).

2) Structure de l'ensemble des solutions [BER]

Notation 11 : On considère les EDO linéaires

$$\gamma' = A(t)\gamma + b(t) \quad (t, \gamma) \in I \times K^N \quad (Z)$$

$$\text{et } \gamma' = A(t)\gamma \quad (t, \gamma) \in I \times K^N \quad (Z_H)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (de Cauchy-Lipschitz linéaire) : Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_N(K))$ et $b \in \mathcal{C}(I, K^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^N$. Alors il existe une unique solution $\gamma: I \rightarrow K^N$ de (Z) tel que $\gamma(t_0) = y_0$.

Notation 13 : Soit S l'ensemble des solutions de (Z) et S_H l'ensemble des solutions de (Z_H) .

Prop 14 : Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_N(K))$. Alors :

1) S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, K^N)$.

2) $\forall t_0 \in I, \phi_{t_0}: S_H \rightarrow K^N, \gamma \mapsto \gamma(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3) S_H est de dimension N .

Corollaire 15 : Soit $A \in \mathcal{C}(I, M_N(K))$ et $b \in \mathcal{C}(I, K^N)$.

Alors S est un K -espace affine de direction S_H .

Exemple 16 : Les solutions de $\gamma'' - 2\gamma' + \gamma = 0$ sont de la forme $\gamma(t) = ae^t + bte^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3) Matrice fondamentale et wronskien [BER]

Def 17: Un système fondamental de solutions de $(\mathcal{L}_H)$ est une famille $(y_1, \dots, y_N)$ de N solutions indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. La matrice $\Phi(t) = (y_1(t) \dots y_N(t))$ est appelée matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_H)$. Le déterminant de $\Phi(t)$ est appelé wronskien de ce système fondamental, noté $w(t)$.

Exemple 18: Pour l'EDO de l'exemple 16, on a $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}$ et $w(t) = e^{2t}$.

Prop 19: Soit $A \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$ et $\Phi \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$. Alors $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale pour $(\mathcal{L}_A)$ ssi 1) Φ dérivable sur I 2) $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad \forall t \in I$

3) $\Phi(t)$ est inversible $\forall t \in I$

Prop 20: Soit $A \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_A)$. Alors les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ s'écrivent $y(t) = \Phi(t) \cdot C$ où $C \in K^N$ et $t \in I$.

Corollaire 21: Soit $y_0 \in K^N$ et $A \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_A)$. La solution de $(\mathcal{L}_H)$ tel que $y(t_0) = y_0$ s'écrit: $y(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} y_0 \quad t \in I$

Exemple 25: La solution de $y'' - 2y' + y = 0$ tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est: $y(t) = (1+t)e^t$.

Prop 26 (identité d'Abel): Soit $A \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$. Soit $\Phi(t)$ matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_A)$. Alors le wronskien $w(t)$ associé à $\Phi(t)$ vérifie:

$w'(t) = \text{Tr}(A(t)) \cdot w(t)$, et donc on a:

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds \right) \quad \forall t \in I$$

II Méthodes de calcul

1) Cas constant homogène [BER]

Def 27: Soit $A \in M_N(K)$, on définit son exponentielle par: $e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}$.

Prop 28: Soit $A, B \in M_N(K)$.

- 1) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(t) = e^{tA}$. Alors Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'(t) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- 2) Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
- 3) e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Prop 29: Soit $A \in M_N(K)$. Alors une matrice fondamentale pour $(\mathcal{L}_A)$ est $\Phi(t) = e^{tA}$. Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ sont les $y(t) = e^{tA} \cdot C$ où $C \in K^N$.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in K^N$, la solution de $(\mathcal{L}_H)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est: $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Exemple 30: Les solutions de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sont de

$$\text{la forme: } \begin{cases} x(t) = \alpha \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} + \beta \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ y(t) = \alpha \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} + \beta \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

2) Variation de la constante [BER]

Soit $A \in \mathcal{L}(I, M_N(K))$ et $B \in \mathcal{L}(I, K^N)$

Méthode 31: On cherche à résoudre $(\mathcal{L})$ si l'on connaît les solutions de $(\mathcal{L}_H)$

Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ s'écrivent $t \mapsto \Phi(t) \cdot C$ avec $C \in K^N$ et $\Phi(t)$ matrice fondamentale. On cherche des solutions de $(\mathcal{L})$ sous la forme $y(t) = \Phi(t) \cdot C(t)$. Alors y est solution de $(\mathcal{L})$ ssi: $\Phi(t) C'(t) = B(t)$ cas où: $C'(t) = \Phi(t)^{-1} B(t)$

On effectue ensuite un calcul de primitive.

Prop 32 (Formule de Duhamel): Soit solution de (Y) tel

que $\gamma(t_0) = \gamma_0$ est donnée par:

$$\gamma(t) = \phi(t) \phi(t_0)^{-1} \gamma_0 + \int_{t_0}^t \phi(t) \phi(s)^{-1} \phi(s) ds$$

où $\phi(t)$ est une matrice fondamentale de (Y).

Exemple 33: La solution de $\gamma' + \gamma = e^t$ tel que

$$\gamma(1) = 0 \text{ est: } \gamma(t) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t+2})$$

3) Utilisation des séries entières [ELA]

Méthode 34: Pour résoudre une EDO linéaire, il peut être utile d'utiliser les séries entières:

- On suppose qu'une solution de l'EDO linéaire est développable en série entière.

- On en déduit son développement grâce à l'EDO linéaire.

- On montre que le rayon de convergence est non nul.

Exemple 35: Une solution de l'EDO linéaire

$$x^2(1-x)\gamma'' - x(1+x)\gamma' + \gamma = 0 \text{ est}$$

$$\gamma(x) = \frac{x}{1-x} \text{ définie sur }]-1; 1[$$

Application 36 (Équation de Bessel): On considère

l'équation différentielle linéaire

$$x\gamma'' + \gamma' + x\gamma = 0 \quad (E)$$

Alors il existe une unique solution de (E)

développable en série entière tel que $\gamma_0'(0) = 1$

$$\text{Elle est définie par } \gamma_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

De plus, si γ est une solution de (E) sur $]0; a[$ alors (γ, γ_0) est libre si γ n'est pas bornée au voisinage de 0.

DEV 2