

103 – Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Soit G un groupe.

1 Conjugaison dans un groupe

1.1 Classes de conjugaison

Proposition 1. Le groupe G agit sur lui-même par,

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Cette action est appelée action par conjugaison de G sur lui-même.

[FU] **Définition 2.** On appelle classe de conjugaison d'un élément h de G l'orbite de h pour l'action par conjugaison de G sur lui-même. Deux éléments de G sont dits conjugués s'ils appartiennent à la même classe de conjugaison. On appelle centralisateur d'un élément h de G , et on note $Z_h(G)$, le stabilisateur de h pour l'action par conjugaison de G sur lui-même.

Exemple 3. 1. La classe de conjugaison d'un élément h de G est réduite à h si et seulement si h commute avec tous les éléments de G (par exemple l'élément neutre e_G).

2. Si G est abélien, il y a autant de classes de conjugaison que d'éléments de G , et celles-ci sont toutes réduites à un élément, et le stabilisateur de tout élément de G est égal à G tout entier.

3. Le centralisateur d'un élément h de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec h .

Proposition 4. Notons $S(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G . Le groupe G agit sur $S(G)$ par,

$$\begin{aligned} G \times S(G) &\longrightarrow S(G) \\ (g, H) &\longmapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

Cette action est appelée action par conjugaison de G sur $S(G)$.

[FU] **Définition 5.** On appelle classe de conjugaison d'un sous-groupe H de G l'orbite de H pour l'action par conjugaison de G sur $S(G)$. Deux sous-groupes de G sont dits conjugués s'ils appartiennent à la même classe de conjugaison.

[FU] **Exemple 6.** Soit X un ensemble sur lequel G agit. Pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$, $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$, et donc $G_{g \cdot x}$ et G_x sont conjugués.

1.2 Centre

Définition 7. On appelle centre de G , et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G . [FU]

Proposition 8. Pour tout $h \in G$, on note $\text{Int}_h : G \rightarrow G$, $g \mapsto hgh^{-1}$. Alors, [FU] l'application,

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ h &\longmapsto \text{Int}_h \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes, de noyau $Z(G)$. En particulier, $Z(G) \triangleleft G$.

Définition 9. On note $\text{Int}(G)$ l'image du morphisme précédent. On appelle [FU] automorphismes intérieurs de G ses éléments.

2 Sous-groupes distingués et groupes quotients

2.1 Sous-groupes distingués

Définition 10. Un sous-groupe H de G est dit distingué dans G , et on note [FU] $H \triangleleft G$, si la classe de conjugaison de H est réduite à H .

Exemple 11. On a toujours $\{e\} \triangleleft G$ et $G \triangleleft G$.

Exemple 12. Soit $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors, $\text{Ker}(\varphi) \triangleleft G$.

Exemple 13. On a toujours $Z(G) \triangleleft G$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps.

$$SL_n(\mathbb{K}) \triangleleft GL_n(\mathbb{K}), \quad SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R}), \quad SU_n(\mathbb{C}) \triangleleft U_n(\mathbb{C}).$$

Définition 14. On dit que G est simple si ses seuls sous-groupes distingués (dans lui-même) sont $\{e\}$ et G .

2.2 Groupes quotients

Proposition 15. Soit H un sous-groupe distingué de G . Alors, l'application,

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (\overline{g_1}, \overline{g_2}) &\longmapsto \overline{g_1 g_2} \end{aligned}$$

est bien définie et permet de munir l'ensemble G/H d'une structure de groupe. Plus précisément, cette application est bien définie si et seulement si $H \triangleleft G$.

Remarque. Puisque $H \triangleleft G$, on a $(G/H)_g = (G/H)_d$.

Proposition 16. Soit H un sous-groupe distingué de G . Notons π la surjection canonique de G sur G/H . Alors, $H = \text{Ker}(\pi)$.

[JR] **Théorème 17 (Premier théorème d'isomorphisme).** Soit $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Notons $i : \text{Im}(\varphi) \rightarrow G'$ l'injection canonique et $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker}(\varphi)$ la surjection canonique. Alors, il existe un unique isomorphisme $\bar{\varphi} : G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$ tel que $\varphi = i \circ \bar{\varphi} \circ \pi$.

Application 18. On a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

Application 19. On a $G/Z(G) \simeq \text{Int}(G)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps.

$$GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*, SO_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, U_n(\mathbb{C})/SU_n(\mathbb{C}) = \mathbb{U}.$$

[JR] **Corollaire 20.** Soit $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Si G est fini alors $\text{card}(G) = \text{card}(\text{Ker}(\varphi)) \text{card}(\text{Im}(\varphi))$.

Application 21. Soit $n \geq 4$. Alors, $\text{card}(D_n) = 2 \text{card}(C_n) = 2n$.

Proposition 22. Si $G/Z(G)$ est monogène alors G est abélien.

Proposition 23. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier tel que G soit de cardinal p^n alors $Z(G) \neq \{e\}$.

Corollaire 24. Soit p un nombre premier. Tout groupe d'ordre p^2 est abélien, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3 Exemples et applications

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Groupe symétrique

[JR] **Proposition 25.** Le centre du groupe $\mathfrak{S}_n$ vérifie :

$$Z(\mathfrak{S}_n) = \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \text{si } n \leq 2, \\ \{Id\} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

[JR] **Lemme 26.** Pour tout cycle $(x_1, \dots, x_r) \in \mathfrak{S}_n$, et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \circ (x_1, \dots, x_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r)).$$

Les conjugués d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$ sont donc les cycles de même longueur.

Définition 27. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle type de σ la suite des cardinaux de ses σ -orbites rangés dans l'ordre croissant.

Remarque. Les σ -orbites formant une partition de l'ensemble $[1, n]$, le type de σ forme donc une partition de l'entier n .

Proposition 28. Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont même type. [FU]

Corollaire 29. Le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ est le nombre de partitions de l'entier n .

3.2 Groupe alterné

Proposition 30. On a $\mathfrak{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$.

Proposition 31. Le centre du groupe $\mathfrak{A}_n$ vérifie : [JR]

$$Z(\mathfrak{A}_n) = \begin{cases} \mathfrak{A}_n & \text{si } n \leq 3, \\ \{Id\} & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

Développement n°1

Lemme 32. Si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. [JR]

Théorème 33. Si $n = 3$ ou $n \geq 5$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple. [JR]

Remarque. Le groupe $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple car,

$$\{Id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \triangleleft \mathfrak{A}_4.$$

De plus, les 3-cycles de $\mathfrak{A}_4$ se répartissent en deux classes de conjugaison.

3.3 Conséquences de la simplicité du groupe alterné

Théorème 34. Si $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{Id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$. [JR]

Lemme 35. Soit $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Si l'image de toute transposition par φ est une transposition alors $\varphi \in \text{Int}(\mathfrak{S}_n)$. [DP]

Théorème 36. Si $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont tous intérieurs. [DP]

3.4 Étude de la commutativité

Développement n°2

Théorème 37 (Théorème de Dixon). Soit G un groupe fini non abélien. On note $n(G)$ le nombre de couples d'éléments de G qui commutent divisé par le nombre total de couples de G . Alors, $n(G) \leq \frac{5}{8}$. [FG]

Proposition 38. Notons D_8 le groupe diédral d'ordre 8. Alors, $n(D_8) = \frac{5}{8}$. [LM]

Proposition 39. On a $n(\mathfrak{S}_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

4
 Figures

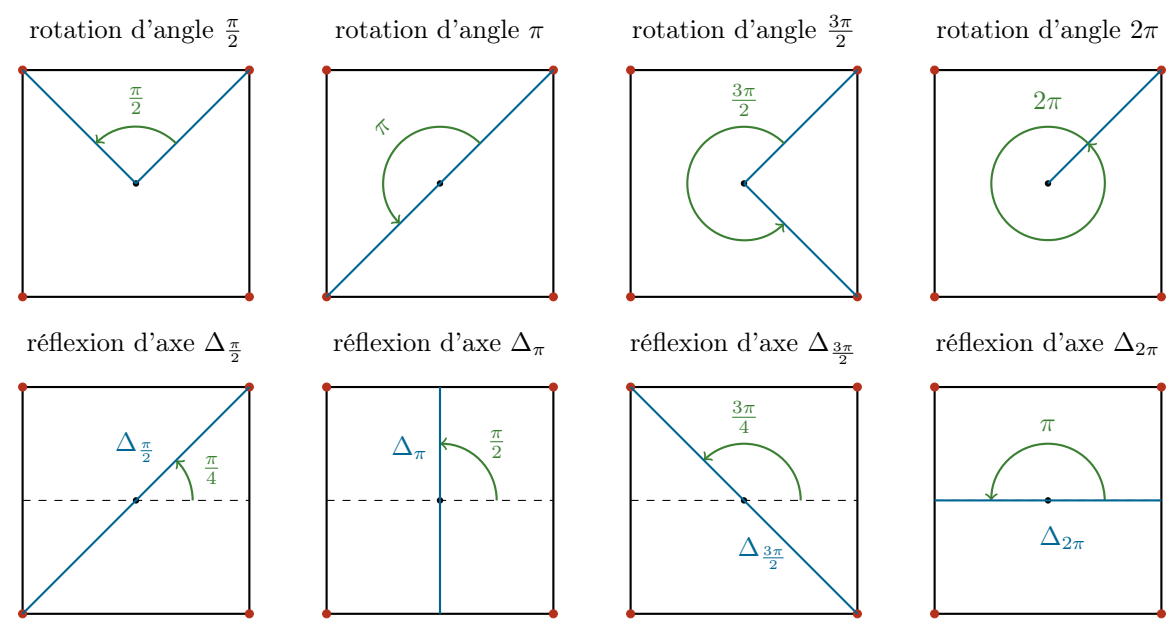


Figure 1: Groupe diédral

5 Références

[FU] : Théorie des groupes, cours et exercices de F. Ulmer (ellipses).

[JR] : Mathématiques pour l'agrégation, algèbre et géométrie de J. Rombaldi (De Boeck Supérieur).

[DP] : Cours d'algèbre de D. Perrin (ellipses).

[FG] : Exercices de mathématiques oraux x-ens, algèbre 1 de S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas (Cassini).

[LM] : 131 développements pour l'oral de D. Lesesvre, P. Montagnon, P. Le Barbenchon et T. Pierron (Dunod).

6 Références détaillées

[FU] : Chapitre 4, définition 4.23.

[FU] : Chapitre 4, définition 4.29.

[FU] : Chapitre 4, proposition 4.34.

[FU] : Chapitre 2, définition 2.10.

[FU] : Chapitre 2, théorème et définition 2.11.

[FU] : Chapitre 1, théorème et définition 1.3.

[JR] : Chapitre 1, théorème 1.7.

[JR] : Chapitre 1, corollaire 1.1.

[JR] : Chapitre 2, lemme 2.3.

[JR] : Chapitre 2, lemme 2.2.

[FU] : Chapitre 5, proposition 5.7.

[JR] : Chapitre 2, exercice 2.23.

[JR] : Chapitre 2, théorème 2.10.

[JR] : Chapitre 2, exercice 2.24.

[JR] : Chapitre 2, théorème 2.12.

[JR] : Chapitre 2, théorème 2.11.

[DP] : Chapitre I, proposition 8.8.

[DP] : Chapitre I, théorème 8.7.

[FG] : Algèbre 1, chapitre 2, exercice 2.12.

[LM] : Développement 2.