

Leçon 214: Théorème inversion locale, fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Cadre: Soient E et F des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie (ou $\mathbb{C}$ -espaces complets). On note $U \neq \emptyset$ un ouvert de E , U' un ouvert de F et $\text{Isom}(E, F) = \{f: E \rightarrow F \mid f \text{ isomorphisme}\}$.

I / Difféomorphisme et inversion locale

1) C^k -difféomorphisme

Définition 1: Soit $f: U \rightarrow U'$ bijective. On dit que f est un:

- difféomorphisme si f et f^{-1} sont différentiables sur U et U' respectivement.
- C^k -difféomorphisme pour $k \in \mathbb{N}^*$ si f et f^{-1} sont de classe C^k sur U et U' respectivement.
- C^∞ -difféomorphisme si f est un C^k -difféomorphisme $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2: Un difféomorphisme est un homéomorphisme.

Exemple 3: $\varphi:]0; +\infty[\times]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$
 $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$
est un C^1 -difféomorphisme.

Théorème 4: Soit $f: U \rightarrow U'$ un homéomorphisme différentiable en $a \in U$. Alors, f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ si, et seulement si, $Df_a \in \text{Isom}(E, F)$. On a alors ici $Df_b^{-1} = (Df_a)^{-1}$.

Théorème 5: Si $f \in C^k(U, U')$ est un difféomorphisme de U sur U' , f est un C^k -difféomorphisme.

Théorème 6: (Changement de variable) Soient O et O' deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi: O \rightarrow O'$ un C^1 -difféomorphisme. Alors:

1) $\forall f: O' \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable positive, on a dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\int_{O'} f(y) dy = \int_O f(\varphi(x)) |\det(\text{Jac } \varphi(x))| dx.$$

2) $f \in L^1(O')$ $\Leftrightarrow (f \circ \varphi) \times |\det(\text{Jac } \varphi)| \in L^1(O)$ et dans ce cas $\int_{O'} f(y) dy = \int_O f(\varphi(x)) |\det(\text{Jac } \varphi(x))| dx$.

Application 7: On peut calculer l'intégrale de Gauss grâce au passage en coordonnées polaires: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Théorème d'inversion locale

Lemme 8: (Théorème du point fixe de Picard)

Soient (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ contractante. Alors, $\exists ! a \in X$ tel que $f(a) = a$.

Théorème 9: (Inversion locale) FIGURE 1

Soit $f \in C^1(U, F)$. Si $\exists a \in U$ tel que $Df_a \in \text{Isom}(E, F)$, alors $\exists V$ un voisinage ouvert de a et W un voisinage ouvert de $f(a)$ tel que f soit un C^1 -difféomorphisme entre V et W . DEV 1

Remarque / contre-exemple 10: 1) L'hypothèse C^1 est importante!

En effet, $f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$, $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ mais n'est inversible sur aucun voisinage de 0 car non injective sur un voisinage de 0.

2) Si $f \in C^1(U, F)$ et $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} F$ alors, en pratique, pour appliquer le théorème 9 en un point $a \in U$, il suffit de vérifier $\det(\text{Jac } f(a)) \neq 0$.



Exemple 11: Soit $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s, p) \in \mathbb{R}^2$ avec $(s, p) = (x+y, xy)$. Alors, on a un ouvert maximal connexe U de $\mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$ est $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

Par ailleurs, $f(U) = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 > 4p\}$ FIGURE 2

Corollaire 12: Soit $f \in C^1(U, F)$ telle que $\forall x \in U$, $Df_x \in \text{Isom}(E, F)$. Alors, f est une application ouverte.

Application 13: (Surjectivité de l'exponentielle matricielle). $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. En particulier, $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$. DEV 2

Théorème 14: (Théorème d'inversion locale C^k)

Pour $k \in [1; +\infty]$, on prend le même énoncé que pour le Théorème 9 en changeant " C^1 " par " C^k " partout.

Théorème 15: (Théorème du changement de coordonnées)

Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^m$. Les relations $U_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, U_m = f_m(x_1, \dots, x_m)$ définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si, et seulement si, $\det(\text{Jac}_f a) \neq 0$.

Corollaire 16: Soient $f_1, \dots, f_p$ des fonctions de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^m$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1}, \dots, f_m$ en un changement de coordonnées au voisinage de a sur $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si, $Df_1(a), \dots, Df_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^m$.

Remarque 17: Le corollaire généralise le théorème de la base incomplète.

Théorème 18: (Théorème d'inversion globale). Soit $f \in C^1(U, F)$ et supposons f injective sur U et,



$\forall x \in U$, $\det \text{Jac } f_x \neq 0$. Alors, $f(U)$ est un ouvert de F et f est un C^1 -difféomorphisme.

Remarque 19: La réciproque est vraie: C est une conséquence du théorème 4.

Remarque 20: Avec ce théorème, on vérifie plus facilement que notre φ de l'exemple 3 est un C^1 -difféomorphisme.

Contre-exemple 21: Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Alors, f est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout point de U , mais ce n'est pas un C^1 -difféomorphisme global.

Théorème 22: (Hadamard-Lévy) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Alors, f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\det(\text{Jac } f_x) \neq 0$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Remarque 23: Le théorème est le théorème d'inversion globale à la seule différence qu'on a remplacé l'hypothèse d'injectivité par une hypothèse de comportement de la fonction. De plus, l'image est l'espace entier avec le théorème 22.

II - Fonctions implicites

Théorème 24: (Fonctions implicites) Soient U un ouvert de $E \times F$, (a,b) un point de U et $f \in C^1(U, F)$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et $\det D_y f(a,b) \neq 0$. Alors, l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : $\exists V \ni a$ ouvert de E , $\exists W \ni b$ ouvert de F avec $V \times W \subset U$ et $\det D_y f(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi: V \rightarrow W$ telle que $(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$. De plus φ est de classe C^1 sur V .



On appelle φ la fonction implicite définie par f au voisinage du point de départ $(a; b)$. On a en particulier $\varphi(a) = b$. FIGURE 3

Remarque 25: L'idée générale de ce théorème est de pouvoir représenter, lorsque c'est possible, un ensemble par le graphe d'une fonction localement. Par exemple, le cône dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ peut être représenté localement par une fonction en tous ses points saut l'origine. Visuellement, c'est le fait que le cône soit pointu en l'origine qui induit ce résultat. FIGURE 4

Corollaire 26: Avec les notations du théorème 24, $\forall n \in V$, $D\varphi(n) = -(D_y f(n, \varphi(n)))^{-1} \circ D_x f(n, \varphi(n))$. (On retrouve l'importance de $\text{Det } D_y f(a, b) \neq 0$).

Exemple 27: Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. Cette équation définit y comme fonction implicite de x et, lorsqu'elle existe, $\varphi'(x) = \frac{x^2 - \varphi(x)}{x - \varphi(x)^2}$. Sur $C \setminus \{(0, 0), (2^{2/3}, 2^{1/3})\}$

Théorème 28: (Fonctions implicites C^k). Pour $k \in \mathbb{N}, +\infty$, on prend la même énoncée que pour le théorème 24 en changeant " C " en " C^k " partout.

Définition 29: Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et $a \in V$. Un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ est dit tangent en a à V s'il existe une fonction dérivable $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ (où $I \ni 0$ intervalle de $\mathbb{R}$) telle que: $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = \vec{v}$. FIGURES

Exemple 30: En reprenant notre exemple 27, l'équation de la tangente à $(a, b) \in C$ est $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$

Remarque 31: Dans nos exemples 27 et 30, $A = (2^{2/3}, 2^{1/3})$ appartient à C . On, $f'_y(A) = 0$ mais $f'_x(A) \neq 0$. Dans ce



Cas b , on peut échanger les rôles de x et y et résoudre $f(x, y) = 0$ et $x = \varphi(y)$ au voisinage de ce point. Comme $f'_y(A) = 0$, on aura $\varphi'(b) = 0$ et une tangente verticale. Cependant, si $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$, comme pour $(a, b) = (0, 0)$ dans notre exemple, le Théorème 24 ne s'applique pas FIGURE 6

Théorème 32: (Extremes liés) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(g_1, \dots, g_p) = g$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et X l'ensemble des équations définies par $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$ avec $x \in U$. Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $Dg_1(a), \dots, Dg_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors les formes linéaires $Df(a), Dg_1(a), \dots, Dg_p(a)$ sont liées.

Remarque 33: L'interprétation géométrique se fait à l'aide de la figure 5.

Application 34: Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$. C étant un compact de $\mathbb{R}^2$, $f|_C$ admet des extremums locaux. Le théorème des extremes liés nous permet de les trouver. (On pose $x = \cos \theta, y = \sin \theta$).

Remarque 35: Dans l'application 34, nous sommes dans le cas relativement simple où C est le cercle centré en 0 de $\mathbb{R}^2$: le théorème des extremes liés n'est donc pas forcément nécessaire pour trouver ces extremums (ou plutôt, on peut les retrouver sans connaître le théorème). C'est donc un bel exemple d'utilisation naturelle des extremes liés, sans même le remarquer!

Références: - Analyse, Gourdon

- Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

- Mathématiques pour l'agrégation externe: Analyse, Rombaldi



MADE WITH
Scanner
App



FIGURE 1: Théorème d'inversion locale

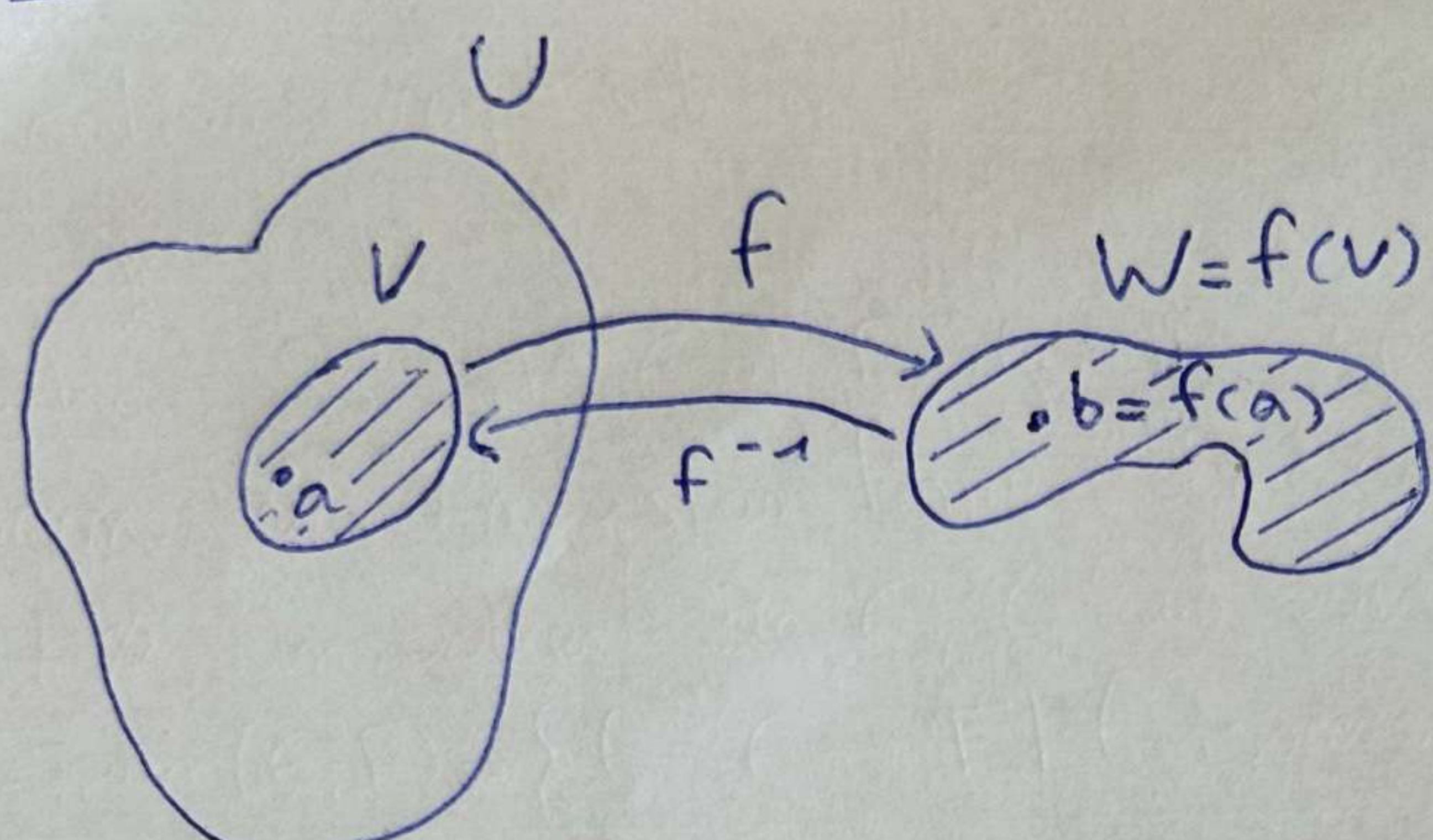


FIGURE 2: Exemple 1.1

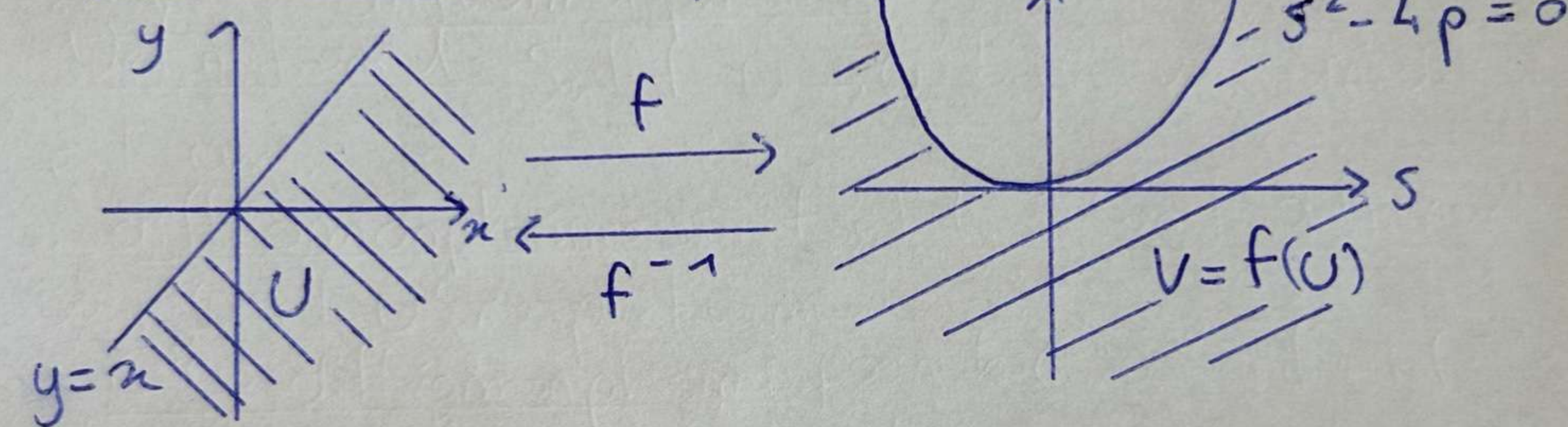


FIGURE 4: le cône est pointu en l'origine, remarque 2.5

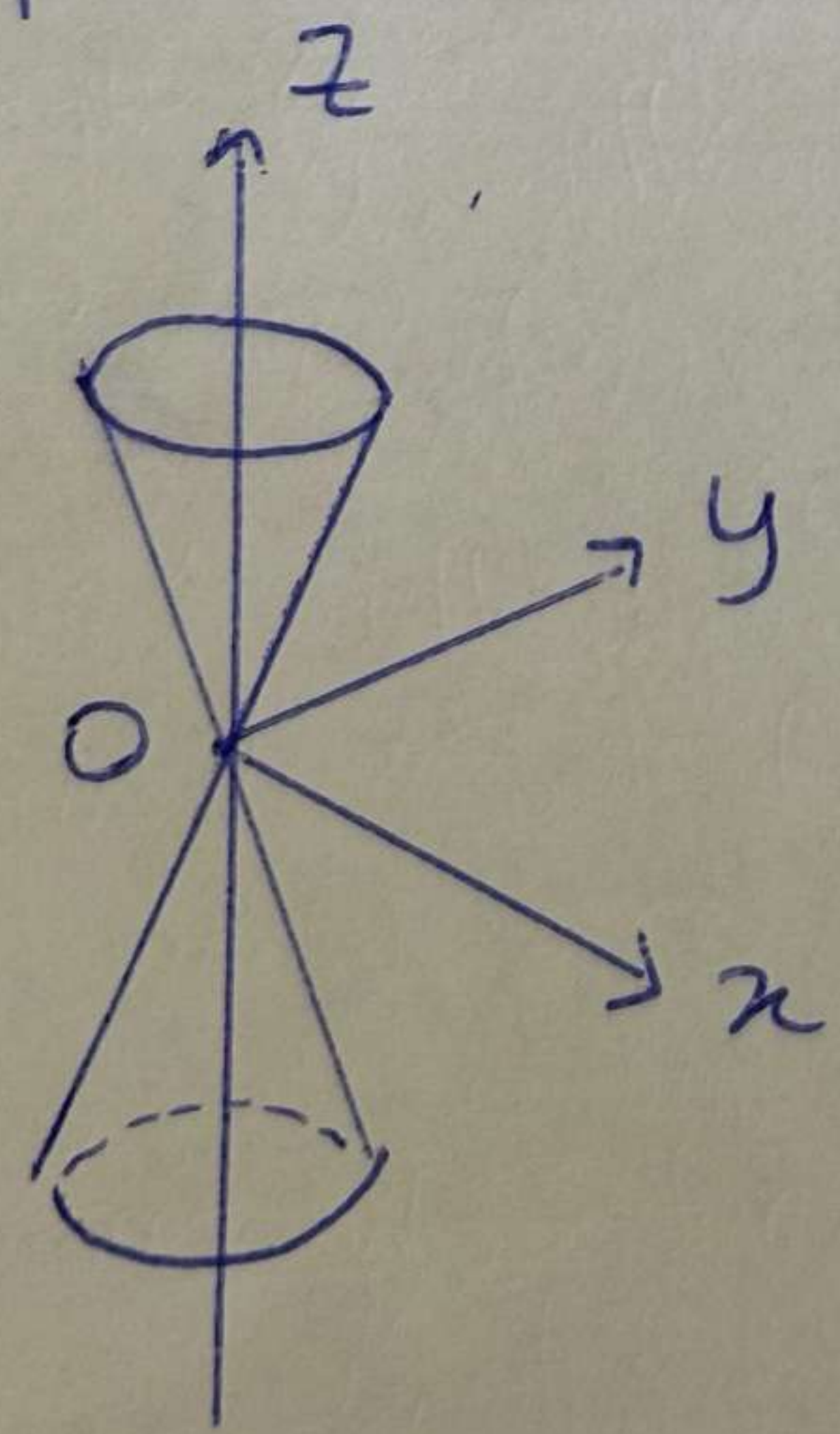


FIGURE 5: vecteur tangent en a à V

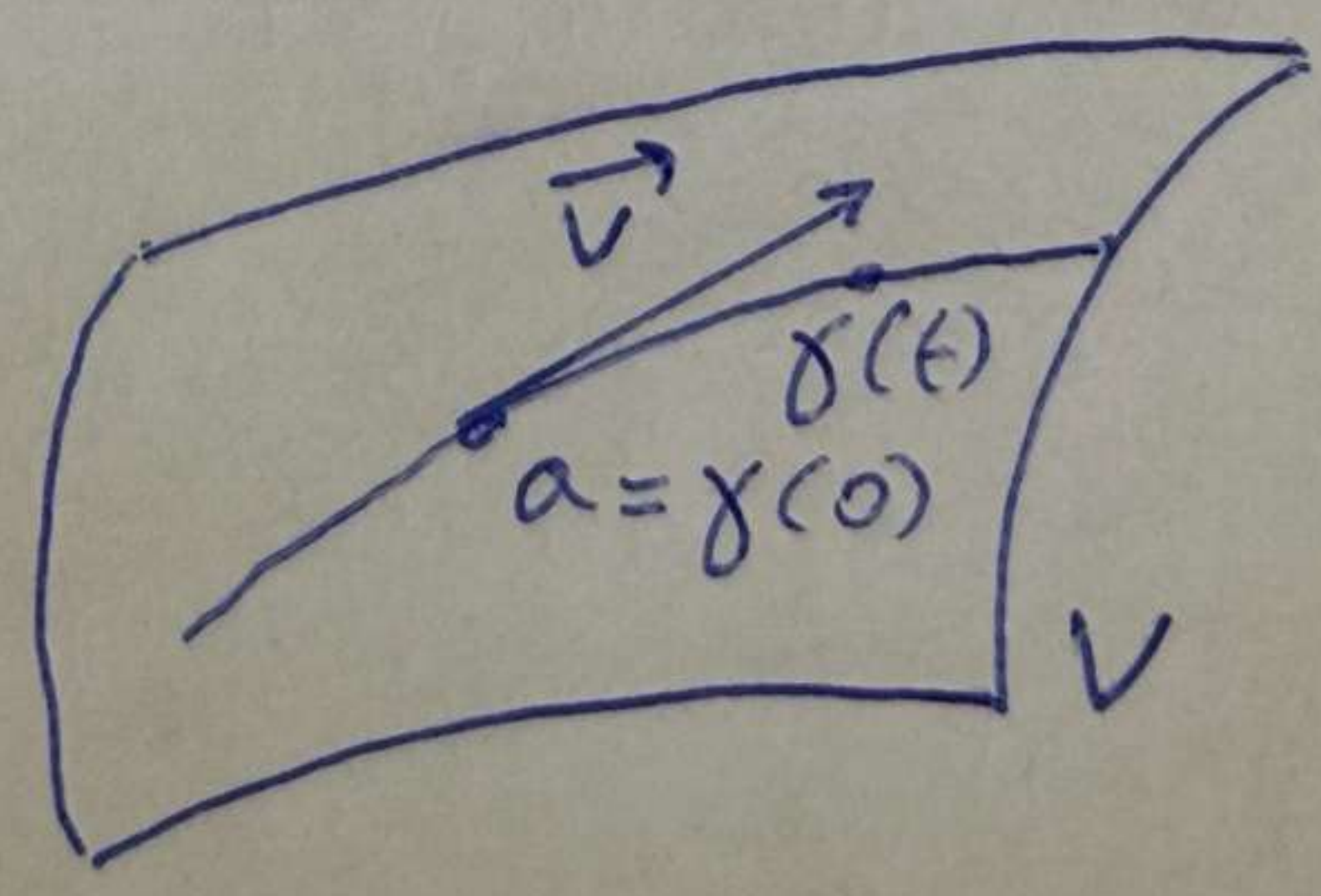


FIGURE 3: Théorème des fonctions implicites

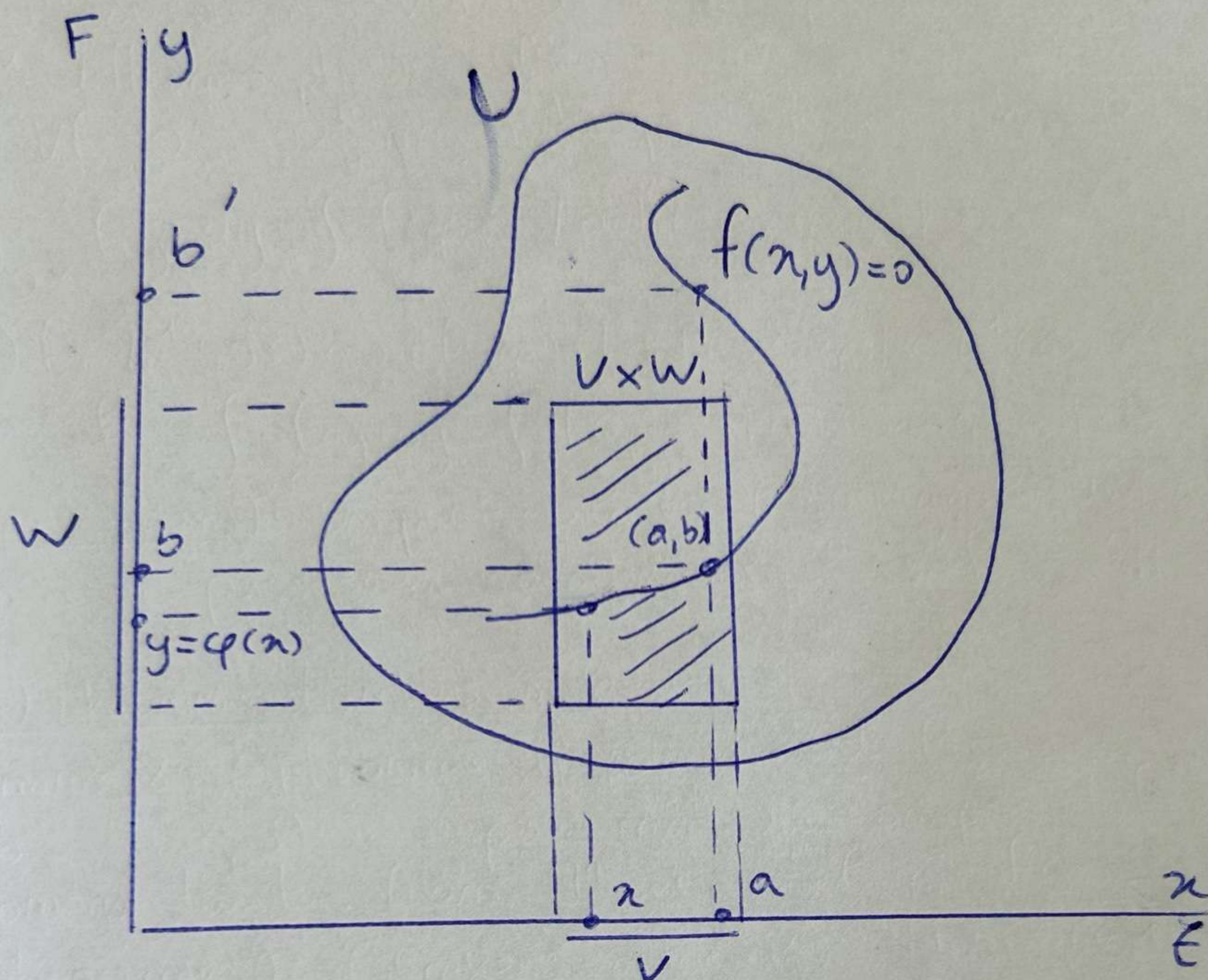


FIGURE 6: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, example 27

