

28 Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Cadre

I. Les différents modes de convergence

1. Convergence presque-sûre [KUR] [BL]

CV p.s, lemmes de Borel Cantelli

2. Convergence en probabilité [BL] [KUR]

CV en proba, CV p.s $\Rightarrow$ CV en proba, sous-suite qui CV p.s, fonction continue

3. Convergence L^p [CHA] [HAU]

CV L^p , $L^q \Rightarrow L^p$, $L^p \Rightarrow \mathbb{P}$, uniforme intégrabilité, CV en proba + UI $\Leftrightarrow$ CV dans L^1

4. Convergence en loi [CHA] [KUR]

CV en loi, fct de répartition

DEV 1 : convergence d'une binomiale vers une Poisson

Fonction continue, CV $\mathbb{P} \Rightarrow$ CV en loi, CV vers une constante, lemme de Slutsky

II. Théorèmes limites

1. Loi des grands nombres [CHA]

LGN faible, LGN forte, estimateur fortement consistant

2. Théorème central limite [CHA]

Fonction caractéristique, théorème de Lévy, TCL, intervalles de confiance asymptotiques, delta-méthode

DEV 2 : formule de Stirling avec le TCL

Annexe :

Liens entre les différents modes convergence

Présentation :

- Le but de cette leçon est d'étudier les différents modes de convergence en probabilités et leurs liens entre eux.
- En pratique, on se sert souvent du lemme de Borel-Cantelli pour montrer la convergence p.s.
- La convergence en probabilité est en général la plus simple à démontrer (grâce à des inégalités du type Markov ou Bienaymé-Tchebichev), mais elle est plus faible que la convergence p.s et L^p .
- La différence majeure entre la convergence en loi et les autres, est que pour les autres il faut que les VA soient définies sur le même espace probabilisé.
- La convergence en loi n'est pas forcément compatible avec l'addition.
- La LGN exprime de façon rigoureuse l'intuition selon laquelle l'espérance d'une VA représente ce qu'on obtient en moyenne si l'on recommence un grand nombre de fois l'expérience.
- Le TCL exprime que la convergence qui a lieu dans la LGN, a une vitesse de convergence d'ordre $\sqrt{n}$.

Développements :

- Convergence d'une loi binomiale vers une Poisson
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzmann, p296
- Formule de Stirling avec le TCL
 - De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzmann, p180-314-556

Références :

- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [BL] Probabilités, Barbe-Ledoux
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Hauchecorne

decom 262: Convergences d'une suite de variables aléatoires.
Théorèmes limites. Exemples et applications.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

I Les différents modes de convergence

1) Convergence presque-sûre [KUR][OL]

Déf 1: On dit que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si: $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\}) = 1$.
On note alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Prop 2: Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$, alors:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou } X_n \xrightarrow{p.s.} X$$

$$2) X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$$

$$3) X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} X Y$$

4) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

Prop 3: $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{ |X_m - X| \geq \varepsilon \} \right) = 0$$

Lemme 4 (de Borel-Cantelli): Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Si $\sum_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$

2) Si la suite $(A_n)_n$ est indépendante et que $\sum_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Corollaire 5: Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Exemple 6: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA indépendantes tel que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

2) Convergence en probabilité [BI][KUR]

Déf 7: On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.
On écrit alors $X_n \xrightarrow{p} X$.

Exemple 8: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des VA IID, de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. Alors leur moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers 0.

Prop 9: Si $X_n \xrightarrow{p} X$ et $Y_n \xrightarrow{p} Y$, alors:

$$1) (X_n, Y_n) \xrightarrow{p} (X, Y)$$

$$2) X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$$

Théorème 10: La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Contre-ex 11: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi Bern(1/n). Alors $X_n \xrightarrow{p} 0$ mais $(X_n)_n$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

Théorème 12: Soit $X_n \xrightarrow{p} X$. Alors il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k \geq 1}$ tel qm $X_{n_k} \xrightarrow{p.s.} X$.

Corollaire 13: Soit $X_n \xrightarrow{p} X$ et f fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Alors $f(X_n) \xrightarrow{p} f(X)$.

3) Convergence L^p [CHA][HAU]

Déf 14: Si $X, X_n \in L^p$, on dit que la suite $(X_n)_n$ converge dans L^p vers X si: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$.

On note alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Prop 15: Soit $1 \leq p \leq q$. Si $X_n \xrightarrow{L^q} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Contre-ex 16: Soit $X_n = \sqrt{n}$. $\mathbb{E}|X_n| \leq \sqrt{n-1}$, $\mathbb{E}|X_n| \rightarrow 0$ mais pas dans L^2 .
Alors $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais pas dans L^2 .

Prop 17: Si $x_n \xrightarrow{L^1} x$, alors $x_n \xrightarrow{IP} x$.

Contre-ex 18: Soit $x_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$. Alors $x_n \xrightarrow{L^1} 0$ donc $x_n \xrightarrow{IP} 0$, mais (x_n) ne converge pas dans L^1 .

Déf 19: Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de VA réelles intégrables est dite uniformément intégrable si :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} E[|x_i| \mathbb{1}_{\{|x_i| > M\}}] = 0$$

Remarque 20: Une famille finie de VA intégrables est uniformément intégrable.

• Si $1 \leq i \leq Y$ p.s $\forall i \in I$ et Y est intégrable, alors $(x_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.

Théorème 21: Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ et x des VA réelles. On suppose chaque x_n intégrable. Il y a équivalence entre :

1) $x_n \xrightarrow{IP} x$ et $(x_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

2) $x \in L^1$ et $x_n \xrightarrow{L^1} x$.

Contre-ex 16 bis: On reprend le contre-exemple 11, Alors $x_n \xrightarrow{L^1} 0$ pour tout $p \geq 1$ mais (x_n) ne converge pas p.s.

4) Convergence et loi [CHA][KUR]

Déf 22: On dit que la suite (x_n) converge en loi vers x si pour toute fonction $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on a que : $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\varphi(x_n)] = E[\varphi(x)]$. On note $x_n \xrightarrow{loi} x$.

Théorème 23: Soit (x_n) et x des VA réelles dont on note F_{x_n} et F_x les fonctions de répartition. Alors la suite (x_n) converge en loi vers x si et seulement si pour tout point de continuité de F_x , $F_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_x(t)$.

Exemple 24: Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ tel que $IP(x_n = \frac{1}{n}) = 1 \quad \forall n \geq 1$. Alors $x_n \xrightarrow{loi} x$ où $IP(x=0)=1$.

Lemme 25 (de Scheffé):

Soit (μ_n, μ, ν) un espace mesuré et $f_1, f_2, \dots, f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ des applications positives intégrables par rapport à μ tel que :

1) $f_n \rightarrow f$ p.p.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$.

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$, c'est-à-dire $\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Corollaire 26: Soit x et $(x_n)_{n \geq 1}$ des VA sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ admettant les densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ par rapport à μ . On suppose que $f_n \rightarrow f$ p.p. Alors (x_n) converge en loi vers x .

Prop 27: Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ et x des VA à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $x_n \xrightarrow{loi} x$ si : $\forall h \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} IP(x_n = h) = IP(x = h)$.

Application 28: Soit $m \geq 1$. On suppose que $x_n \sim Bin(m, p_n)$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} m p_n = \lambda > 0$. Alors (x_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Prop 29: Soit $x_n \xrightarrow{loi} x$. Soit $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $\varphi(x_n) \xrightarrow{loi} \varphi(x)$.

Prop 30: Soit $x_n \xrightarrow{IP} x$. Alors $x_n \xrightarrow{loi} x$.

Contre-ex 31: Soit $x \sim Ber(\frac{1}{2})$ et (x_n) tel que $x_n = 1 - x \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $x_n \xrightarrow{loi} x$ mais pas en probabilité.

Prop 32: On suppose que (x_n) converge en loi vers une VA à constante. Alors $x_n \xrightarrow{IP} a$.

Lemme 33 (de Slutsky): Soit (x_n) et (y_n) des VA réelles tel que $x_n \xrightarrow{loi} x$ et $y_n \xrightarrow{loi} a \in \mathbb{R}$. Alors $(x_n, y_n) \xrightarrow{loi} (x, a)$.

Ainsi: $x_n + y_n \xrightarrow{loi} x + a$ et $x_n y_n \xrightarrow{loi} a x$.

II Théorèmes limites

1) Loi des grands nombres [CHA]

Théorème 34 (loi faible des grands nombres): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles IID. Si $E[x_1] < +\infty$, alors:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{p.s.} E[x_1]$$

Théorème 35 (loi forte des grands nombres): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles IID. Si $E[x_1] < +\infty$, alors:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{p.s.} E[x_1]$$

Corollaire 36: Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, alors: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \xrightarrow{p.s.} P(A_1)$

Application 37: La moyenne empirique $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ est un estimateur sans biais et fortement convergent de $E[x_1]$.

2) Théorème central limite [CHA]

Déf 38: La fonction caractéristique de x est la fonction:

$$\phi_x: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ définie par: } \phi_x(t) = E[e^{i \langle t, x \rangle}] \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 39 (de Lévy) ADMIS: On a l'équivalence:

$$x_n \xrightarrow{loi} x \iff \phi_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 40 (central-limite): Soit $(x_n)_n$ une suite de VA réelles IID, de carré intégrable. On note $\mu = E[x_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(x_1)$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Alors:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n\mu) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Corollaire 41: Sans les mêmes hypothèses, avec $a > 0$, et en notant la variance empirique $\bar{\sigma}_n^2$, on a:

$$P\left(\mu \in \left[\bar{x}_n - \frac{a\sqrt{\bar{\sigma}_n^2}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{a\sqrt{\bar{\sigma}_n^2}}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-u^2/2} du.$$

cela permet de construire des intervalles de confiance asymptotique pour μ .

Corollaire 42: Soit (S_n) suite de VA de loi Bin (n, p) . Alors la suite $Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers X tel que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Prop 43 (Delta-méthode): Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles. Soit $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{n}(x_n - \theta) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en θ tel que $g'(\theta) \neq 0$. Alors: $\sqrt{n}(g(x_n) - g(\theta)) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, (g'(\theta))^2 \sigma^2)$.

Lemme 44: Soit $X \sim \Gamma(n_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(n_2, \lambda)$ avec $X \perp Y$. Alors $X + Y \sim \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$.

Application 45: Soit (x_n) suite de VA IID de loi $\mathcal{U}(1)$. En étudiant $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$, on en déduit la formule de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

DEV 2

ANNEXE

lien entre les différents modes de convergence

