

16 Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

I. Méthodes directes pour des fonctions d'une variable

1. Primitives [TL1]

Primitive, théorème fondamental de l'analyse, exemples

2. Intégration par parties [TL1] [GOU]

IPP, primitive de $\ln$, intégrales de Wallis, fonction gamma

3. Changement de variable [TL1] [GOU]

Changement de variable, corollaire fonctions paires/impaires/périodiques

II. Méthodes pour les intégrales multiples

1. Théorèmes de Fubini [BRI] [GK]

Fubini-Tonelli, Fubini-Lebesgue, intégrale de Dirichlet

2. Changement de variable généralisé [FAR] [BRI]

Changement de variable multi-dimensionnel, coordonnées polaires, intégrale de Gauss

III. Intégrales à paramètres [ZQ] [FAR] [BRI]

TCD, continuité sous l'intégrale, transformée de Fourier, fonction gamma, dérivation sous l'intégrale, lien moments-fonction caractéristique

DEV 1 : intégrale de Dirichlet

IV. Utilisation de l'analyse complexe [LES] [TAU] [IP]

Intégrale complexe, indice, théorème de Cauchy, intégrale de Dirichlet, résidu, théorème des résidus, fonction carac de la Cauchy, holomorphie sous le signe intégrale, fonction carac de la Normale

DEV 2 : fonction caractéristique et moments de la loi $\Gamma(r, \lambda)$

Présentation :

- Il n'existe pas de procédure automatique pour calculer une intégrale, c'est pour cette raison que l'on cherche différents outils de calcul.
- L'utilité de l'IPP est que parfois il est difficile de trouver la primitive d'une fonction directement (par exemple pour $\ln$).
- Dans la pratique, il faut savoir jongler entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue.
- L'utilité du théorème de dérivation sous l'intégrale est qu'il permet par exemple de montrer qu'une intégrale vérifie une certaine équation différentielle, et donc obtenir une formule explicite de cette intégrale.

Développements :

- Intégrale de Dirichlet
 - Calcul intégral, Candelpergher, p30 et 212
 - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis, p262

- Oraux X-ENS Analyse 3, FGN, p214
- Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma
 - L'Oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p453
 - Exercices de probabilités, Cottrell and co, p121

Références :

- [TL1] Tout en un pour la licence 1
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [GK] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [ZQ] Analyse pour l'agrégation, Queffelec-Zuily
- [LES] Variables complexes, Lesfari
- [TAU] Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Exercice 236: Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Méthodes directes pour des fonctions d'une variable

1) Primitives [TL7]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1: Toute fonction f continue sur I admet une primitive. Plus précisément, la primitive de f qui s'annule en $a \in I$ est l'application $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Théorème 2 (Fondamental de l'analyse): Soit f de classe C^1 sur I . Alors, $\forall \alpha, \beta \in I: \int_\alpha^\beta f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

Corollaire 3: Soit f continue sur I . Si F est une primitive de f , alors: $\forall a, b \in I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Exemple 4: $\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -(\cos(\pi) + \cos(0)) = 2$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_0^A = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Pour } d > 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^d} dt = \left[\frac{t^{1-d}}{1-d} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{d-1}$$

2) Intégration par parties [FL1][600]

Théorème 5: Soit f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a; b]$. Alors: $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$.

Exemple 6: Une primitive de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $t \mapsto t \cdot \ln(t) - t + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 7: Une primitive de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto t \cdot \arctan(t) - \ln(\sqrt{1+t^2}) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 8 (Intégrales de Wallis): Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$. Alors en faisant une IPP, on obtient que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on a

$$\text{alors: } I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}$$

Exemple 9 (fonction gamma): On définit pour $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Alors, $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ et donc $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Changement de variable [TL7][600]

Théorème 10: Soit $\mathcal{C}$ de classe C^1 sur I , α valeurs dans un intervalle J . Si $a, b \in J$ et $f: I \rightarrow J$ continue, alors:

$$\int_a^b f(\mathcal{C}(t)) \cdot \mathcal{C}'(t) dt = \int_{\mathcal{C}(a)}^{\mathcal{C}(b)} f(x) dx$$

Exemple 11: $\int_0^{4\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin(t)} dt = 0$ en posant $x = \sin(t)$.

Corollaire 12: Soit $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Si f est paire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et T -périodique.

$$\text{Alors, } \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

II Méthodes pour les intégrales multiples

1) Théorèmes de Fubini [Bri][600]

Soit (x, t, μ) et $(y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis.

Théorème 13 (Fubini-Tonelli): Soit $f: (x \times y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors $x \mapsto \int_y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_x f(x, y) d\mu(x)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ -mesurables. De plus:

$$\int_{x \times y} f d\mu \otimes \nu = \int_x \left(\int_y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_y \left(\int_x f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Théorème 14 (Fubini-Lebesgue): Soit $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors:

$x \mapsto \int_y f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ μ -presque partout

$x \mapsto \int_y f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ ν -pp

$x \mapsto \int_y f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ et est définie μ -pp

• $\gamma \mapsto \int_X f(x, \gamma) d\mu(x) \in L^1(\gamma)$ et est définie v-p-p

• $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, \gamma) d\nu(\gamma) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, \gamma) d\mu(x) \right) d\nu(\gamma)$

Contre-ex 15: la fonction $f(x, \gamma) = 2e^{-x\gamma} - e^{-x\gamma}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$, car $\int_0^1 \left(\int_0^+ f(x, \gamma) d\mu \right) d\gamma = 0$ et $\int_0^+ \left(\int_0^1 f(x, \gamma) d\gamma \right) dx = \int_0^+ \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln(2)$

Exemple 16: En calculant $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+\gamma)(1+x^2\gamma)} dx d\gamma$ de deux manières, on obtient que

Application 17 (intégrale de Dirichlet):

En calculant l'intégrale de $f(x, \gamma) = e^{-x\gamma} \sin x$ sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$, on trouve: $\int_0^+ \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Changement de variable généralisé [FAR] [BRI]

Théorème 18 (ADMIS): Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\ell: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Soit f intégrable sur V à valeurs réelles ou complexes. Alors la partition $(j \circ \ell) \times 1$ det $J\ell$ est intégrable sur U et:

$$\int_U f(\gamma) d\gamma = \int_V f(\ell(x)) | \det J\ell(x) | dx$$

Exemple 19: L'application $\ell: \mathbb{R}_+^4 \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

est un C^1 -difféomorphisme, de Jacobien égal à r .

Application 20 (intégrale de Gauss): En calculant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ de deux manières, on en déduit que } \int_0^+ e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

III Intégrales à paramètres [ZQ] [FAR] [BRI]

On considère (x, t, μ) un espace mesuré et E un espace métrique. On considère une fonction $f: E \times X \rightarrow \mathbb{C}$ et on pose $F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$

Théorème 21 (de convergence dominée): Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables vérifiant:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ $\mu(x)$ -pp
 - il existe g positive intégrable tel que $\forall n, |f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu(x)$ -pp.
- Alors f est intégrable et: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
- (et même $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$)

Exemple 22: Soit $d > 1$, On pose $I_n(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{x}{t}\right)^n e^{-tx} dx$ pour $n \geq 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = \int_0^+ e^{-(1-x)t} dx = \frac{1}{2-x}$.

Théorème 23 (de continuité sous le signe intégrale): On suppose que:

1) $\forall t \in E, x \mapsto f(t, x)$ est mesurable

2) Pour presque tout $x \in X, t \mapsto f(t, x)$ est continue en $t_0 \in E$.

3) il existe $g \in L^1(X)$ tel que $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \mu(x)$ -pp.

Alors F est définie sur E et est continue en t_0 .

Exemple 24: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 25: La fonction gamma est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 26 (dérivation sous le signe intégrale): Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose:

- 1) $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x)$ est dans $L^1(X)$
- 2) $\mu(x)$ -pp, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I , noté $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.
- 3) pour tout compact K de I , il existe $g_K \in L^1(X)$ positive tel que: $|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in K, \mu(x)$ -pp.

Alors pour tout $t \in I, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \in L^1(X)$ et la fonction

F est dérivable sur I avec: $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x) \quad \forall t \in I$.

Remarque 27: Ce théorème se généralise pour des fonctions de classe C^k en $\mathbb{C}^\infty$.

On a la fonction caractéristique de x : $\phi_x(t) = \mathbb{E}[e^{itx}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Application 28: Soit x une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre n . Alors ϕ_x est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}[x^n] = (-i)^n \phi_x^{(n)}(0)$.

Application 29: On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt \quad \forall x > 0$

En étudiant cette fonction, on a l'égalité:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

DEV 1

IV Utilisation de l'analyse complexe [LES] [TAU] [IP]

Soit γ un arc de $\mathbb{C}$ et $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$

Déf 30: Soit $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Théorème 31: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, on pose: $\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \zeta} d\zeta$. Il s'agit d'un entier dépendant de z . Il est égal au nombre de tours que fait γ autour de z .

Théorème 32 (de Cauchy): Soit γ un arc simplement connexe. Soit $f \in \mathcal{H}(\gamma)$. Soit γ un chemin fermé contenu dans γ . Alors: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Exemple 33: En intégrant $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi, on trouve que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Déf 34: Soit f une fonction continue sur un arc γ et a un point de γ . Le nombre $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$, est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de f en a .

Déf 34: Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ et $a \in U$ un pôle d'ordre m de f . La partie principale de f en a est: $p(z) = \sum_{k=1}^m a_k (z-a)^{-k}$. On dit que a_n est le résidu de f en a , noté $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 35 (des résidus): Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k , alors:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Exemple 36: Soit $n \geq 1$. Alors: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e^{-it}} dt = \frac{2\pi}{1 - 1} = 2\pi$

Application 37: La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(x)$ est: $t \mapsto e^{-|t|}$.

Théorème 38 (holomorphie sous le signe intégrale): Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que:

1) $\forall z \in U, t \mapsto f(z, t)$ est mesurable

2) $\forall t \in \mathbb{R}, z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe sur U

3) $\forall K$ compact de U , il existe $g_K \in L^1(\mathbb{R})$ tel que pour tout $z \in K$ et tout $t \in \mathbb{R}, |f(z, t)| \leq g_K(t)$.

Alors la fonction F définie sur U par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z, t) dt$$

$$F'(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt$$

Application 39: La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est: $t \mapsto e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Application 40: On dit que x suit la loi $\Gamma(a, \lambda)$ si elle admet pour densité: $f_x(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. On a alors que $\phi_x(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Corollaire 41: Si $x \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors x admet un moment d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[x^n] = \frac{n!}{\lambda^n} \Gamma(a)$.

DEV 2