

228: Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Ex. et appli.

I intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. $a \in I$

I. Autours de la notion de continuité

a) Généralités

Def. 1: On dit que f a pour limite P en a si:

$a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in (I \setminus \{a\}) \cap]a-\eta, a+\eta[$, $|f(x) - P| < \varepsilon$

$a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x > \eta$, $|f(x) - P| < \varepsilon$

$a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x < -\eta$, $|f(x) - P| < \varepsilon$

Rmq. 2: une telle limite est unique quand elle existe on la note $P = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Def. 3: On dit que f a une limite $\bar{a}$ gauche (resp. à droite) P en a si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a-\eta, a[$, $|f(x) - P| < \varepsilon$

(resp. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a, a+\eta[$, $|f(x) - P| < \varepsilon$)

Def. 4: On dit que f est continue (resp. à gauche, resp. à droite) en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$)

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout $a \in I$.

Thm. 5: Si f est continue en a alors f est bornée dans un voisinage de a .

Thm. 6: Si $a \in I$, f est continue en a si f continue à gauche et à droite en a .

Thm. 7: f est continue si l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de I si l'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de I .

Thm. 8: f est continue en $a \in I$ si $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ tq $a_n \rightarrow a$ alors $f(a_n) \rightarrow f(a)$

Ex. 9: Définissons f tq $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ m est pas continue en 0 puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0$ or $f(\frac{1}{n\pi}) = (-1)^n$ qui est dv.

Thm. 10: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$ si $(a_n) \subset I$ tq $a_0 \in I$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ Si $a_n \rightarrow a \in I$ tq f continue en a alors $f(a) = a$.

Thm. 11: Soit $a \in I$ tq $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = P$. Il existe une unique prolongement de f à $I \cup \{a\}$ qui est continue en a . Il est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(a) = P$.

Thm. 12: Soient f, g continues en $a \in I$. Les fonctions $|f|$, $f+g$, fg , $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues en a .

Thm. 13: Si f continue en a tq $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est définie sur un voisinage de a et est continue en a .

Thm. 14: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall a \in I$. $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tq J est un intervalle contenant $f(I)$ et tq g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

b) Continuité et compacité

Thm. 15: Si K est un compact de $\mathbb{R}$, toutes fonctions de K dans $\mathbb{R}$ est uniformément continues

Thm. 16: Toutes fonctions définies sur un intervalle réel fermé bornée est bornée et atteint ses bornes

Ex. 17: $x \mapsto x^2$ est continue mais pas u.c.

Rmq. 18: On peut alors définir la norme de la Cvx sur $\mathcal{C}(a, b; \mathbb{R})$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

c) Théorèmes des valeurs intermédiaires et applications

Thm. 19: Si f est continue alors $f(I)$ est un intervalle

Thm. 20: (TVI) $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si f est continue et $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tq $f(\alpha) = 0$.

Def. 21: On dit que vérifie la ppt des valeurs intermédiaires si $\forall a < y \in I$, $\forall \lambda$ entre $f(a)$ et $f(y)$, $\exists c \in (a, y)$ tq $f(c) = \lambda$.

Thm. 22: Soit f vérifiant la ppt des valeurs intermédiaires. f est continue si $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I .

Thm. 23: Si f est monotone tq $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I .

Thm. 24: Si f est strictement monotone alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et son inverse est strictement monotone de même sens de variation que f . et $f(I)$ est de même nature que I .

Thm. 25: Si f est continue alors f est injective si elle est strictement monotone.

II. Autours de la dérivabilité

a) Généralités

Def. 26: On dit que f est dérivable en $a \in I$ si la fonction $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite en a . On note $f'(a)$ cette limite

(cont)
p. 170
173

(cont)
p. 173
177

Thm. 27: Si f est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.

Def. 28: f est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a \in I$ si $\exists a$ admet une limite à gauche (resp. à droite) en a .

Thm. 29: Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in I$ alors elle est continue en a .

Thm. 30: f est dérivable en $a \in I$ si f est dérivable à gauche et à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$. Le plus $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Def. 31: Soit D est l'ensemble des points de I où f est dérivable. On définit la fonction dérivée de f sur D par $a \mapsto f'(a)$.

Rmq. 32: Une fonction peut être continue mais nulle part dérivable. Par exemple: Soit $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ Alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en aucun point.

Def. 33: On dit que f est $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable et f' est continue sur I .

On dit que f est $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue.

On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si elle est n fois dérivable $\forall n \in \mathbb{N}$.

Thm. 34: Supposons que f, g sont dérivables en $a \in I$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f + g$ est dérivable
 - fg est dérivable
 - Si $g(a) \neq 0$ et g ne s'annule pas sur un voisinage de a , $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables
- Cf Fig 1 pour l'expression des dérivées.

Thm. 35: (Formule de Leibniz) f, g n fois dérivables. fg est n fois dérivable et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Thm. 36: $f: I \rightarrow \mathbb{S}$ dérivable en a , $g: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

Thm. 37: f strictement monotone dérivable en a . Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

b. Sens de variation d'une fonction et extremas

$a \in I$

Thm. 38: Si f est continue sur I , dérivable sur I . f est croissante si $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$

Cor. 39: f, g continues sur I dérivables sur I .

(i) f est décroissante si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$

(ii) f est constante si $\forall x \in I, f'(x) = 0$

(iii) f est strictement croissante (resp. décroissante) si $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$).

(iv) Si $f'(a) \leq g'(a) \quad \forall a \in I = [a, b]$ on a:

$\forall a \in [a, b], f(a) - f(a) \leq g(a) - g(a)$

(v) Si $m \leq f'(a) \leq M \quad \forall a \in I = [a, b]$ on a:

$\forall a \in [a, b], m(a-a) \leq f(a) - f(a) \leq M(a-a)$

Thm. 40: Si f est continue sur I et dérivable à droite sur I , alors f est croissante sur I si $f'_d(a) \geq 0 \quad \forall a \in I$.

Thm. 41: Si f est dérivable en $a \in I$. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Thm. 42: Si f dérivable en $a \in I$ et admet un max (resp. min) local en ce point alors $f'_g(a) \geq 0$ et $f'_d(a) \leq 0$ (resp. $f'_g(a) \leq 0$ et $f'_d(a) \geq 0$).

Thm. 43: f dérivable sur I . $a \in I$. Si $(x-a)f'(a) \geq 0$ (resp. $(x-a)f'(a) \leq 0$) $\forall x \in I$ alors f admet un minimum (resp. max) global en a .

Thm. 44: (Barboure) Si f est dérivable sur I alors f' vérifie la ppt des valeurs intermédiaires.

c. Théorème de Rolle et accroissements finis

Thm. 45: (Rolle) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, continue dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

Rmq. 46: Si m, g a pas unicité de c (cf. Fig 2). La continuité au bord est importante regarder $f: x \in]0, 1[\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Thm. 47: $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$ alors $\exists c \in]a, +\infty[$ tq $f'(c) = 0$

Thm. 48: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tq $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $f'(c) = 0$

Thm. 49: (Accroissements finis) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

[RDM]
p. 205
-208

CRATI
p. 210
-211

[RDM]
p. 251
-252

[RDM]
p. 258

[RDM]
p. 7
-204

d. Formule de Taylor

Thm. 50: (Taylor-Lagrange) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ et η

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Thm. 51: (Taylor reste intégrale) $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ Alors:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Prop. 52: $f \in C^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ on note $M_k = \sup |f^{(k)}(x)|$

On a M_0 et M_n sont finis. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$:

(i) M_k est fini (ii) $M_k \leq \sqrt{2 M_0 M_n}$ (iii) $M_k \leq 2 \frac{n(n-k)}{2} M_0 \approx M_n \frac{k}{n}$

Thm. 53: (Taylor-Young) f n fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Lorsque $x \rightarrow a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

III. Etude de certaines classes de fonctions

a. Suites, séries de fonctions continuité et dérivabilité

Thm. 54: Soit (f_n) suites de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui conv vers f . Si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue alors f est continue

Thm. 55: $f_n \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Si $\exists x_0 \in]a, b[$ tq $(f_n(x_0))$ cv et (f'_n) cv sur $[a, b]$ vers une fonction g . Alors (f_n) cv sur $[a, b]$ vers f et $f' = g$.

Thm. 56: (Weierstrass) Toute fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est limite d'une forme de polynôme.

Remq. 57: Pour des séries de fonctions il suffit de considérer $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$

b. Intégrales à paramètres $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$

Thm. 58: (continuité sous le signe intégrale) Si:

- $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- $u \mapsto f(u, x)$ est continue p.p en x_0
- $\exists g \in L^1$ tq $\forall u \in I, |f(u, x)| \leq g(x)$ p.p x

Alors $F(u) = \int_X f(u, x) d\mu$ est continue en x_0 (et est défini $\forall u \in I$)

Thm. 59: (dérivation sous le signe intégrale) Si:

- $\forall u \in I, f(u, \cdot) \in L^1$

$\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)$ existe p.p. x

$\exists g \in L^1$ tq $\forall u \in I, |\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$

Alors, $F(u) = \int f(u, x) d\mu(x)$ est définie dérivable sur tout I et

$$F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$$

c. Séries de Fourier

Def. 60: On note $C_{2\pi}$ l'ensemble fonctions continues et 2π -périodiques

sur $\mathbb{R}$. On note $L^1_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques localement intégrables sur $\mathbb{R}$

Def. 61: $f \in L^1_{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ème coef. de Fourier la quantité $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Def. 62: $D_N := \sum_{n=-N}^N e^{inx}$ est appelé noyau de Dirichlet

Prop. 63: $S_N(f) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = f * D_N$ (où $e_n(x) = e^{inx}$)

Thm. 64: (Dirichlet) $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si:

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent (notons les $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$)

(ii) Si $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}$ existent

$$\text{Alors } \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Thm. 65: (Banach-Steinhaus) $E, F \geq$ Banach $T: E \rightarrow F$ linéaires continues

$(T_i)_{i \in I}$ tq $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$

Appl. 66: f associe au moins une fonction continue tq sa série de Fourier ne converge pas en 0

Références:

PROUS: Rombadi, élément analyse conv

BOUS: Berber, Analyse

BRIS: Briene-Pajon, théorie...

ZELAM: El Amrani, Analyse Fourier

RUOT: Rudin, Analyse réel et complex

CLIS: 2i, Analyse fonctionnelle

Remq:

Mettre un peu + d'ex

Mettre un peu + d'ex

cf. CHAVS

IBRI
p. 40
- 144

ZELAM
p. 11
- 173

ZELAM
p. 18

ZELAM
p. 11

ZUS
p. 12

ZUS
p. 130
DEVZ

Annexe:

Fig. 1: faire tableau des dérivées

Fig. 2:

