

Leçon 2.6: Suites récurrentes et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Ex. et appli à la res. approchée d'eq.

(E, ||.||) $\mathbb{K}$ -evm

I. Définitions et exemples

a) Définitions et premières propriétés

Def. 1: $h \in \mathbb{N}^*$ $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite rec. d'ordre h si elle peut s'écrire $\forall m \geq h$ $u_m = f(u_{m-1}, \dots, u_{m-h})$ où $f: E^h \rightarrow E$

Prop. 2: $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ rec d'ordre h , avec les mêmes notations que dans la def. 1. Si (u_n) cv vers $\ell \in E$ et f continue au point $(\ell, \dots, \ell)$ alors $\ell = f(\ell, \dots, \ell)$

Prop. 3: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$. Soit (u_n) tq $u_0 \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si f croissante, (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe $u_1 - u_0$
- Si f décroissante, $f \circ f$ est croissante donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée.

Def. 4: On dit que (u_n) converge géométriquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) $k \in]0, 1[$

Def. 5: On dit que (u_n) converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite de la forme A_n^{-1} avec $A, \alpha \in \mathbb{R}^+$

Def. 6: — — — — — (au moins) quadratique si elle est dominée par une suite (k^{2n}) $k \in]0, 1[$

b) Suites récurrentes classiques

Def. 7: On dit que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est arithmétique si elle peut s'écrire $u_{n+1} = u_n + a$ ($a \in E$)

Prop. 8: Si (u_n) est arithmétique alors (u_n) peut s'écrire $u_n = u_0 + na$

Def. 9: On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est géométrique si elle peut s'écrire

$$u_{n+1} = qu_n$$

$$q \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } \mathbb{C}^*$$

Prop. 10: Si (u_n) est géométrique alors (u_n) peut s'écrire $u_n = q^n u_0$
Si $|q| > 1$ (u_n) dv si $|q| < 1$ (u_n) cv et pour limite 0 si $q = 1$ (u_n) est constante.

Def. 11: On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si elle peut s'écrire $u_{n+1} = qu_n + a$

Prop. 12: Si (u_n) arithm-geo si $q \neq 1$ on a $u_n = q^n(u_0 - r) + r$ avec $r = \frac{a}{1-q}$

Def. 13: On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est récurrente homographe si elle vérifie: $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad-bc \neq 0$

Prop. 14: Soit (u_n) homographe. $h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$ (E)

• Si (E) admet 2 racines distinctes α, β alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où} \quad k = \frac{a - d\alpha}{a - d\beta}$$

• Si (E) admet racine double α alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{où} \quad k = \frac{c}{a - d\alpha}$$

Def. 15: On dit que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à coef. constant si $\forall m \geq h$ $u_m = a_1 u_{m-1} + \dots + a_h u_{m-h}$

Prop. 16: L'eq. $x^h - a_1 x^{h-1} - \dots - a_h = 0$ s'appelle eq. caract. de (u_n) (comme dans la def). Soient $r_1, \dots, r_q$ ses racines et $d_1, \dots, d_q$ leurs multiplicités. L'ensemble des suites (u_n) (comme dans la def) est de la forme $u_n = p_1(n)r_1^n + \dots + p_q(n)r_q^n$ où p_i pol. de deg $\leq d_i$.

Prop. 17: (cas linéaire d'ordre 2) $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$, $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$ eq. car. est $x^2 - ax - b = 0$ (E)

• Si (E) 2 racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$)

• Si (E) 1 racine λ , alors $u_n = (\lambda n + \mu)\lambda^n$

• Si (E) 2 racines complexes non réelles $p e^{i\theta}$ et $p e^{-i\theta}$ $u_n = p^n (\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta))$

[6003]
p.200

[ELAM]
p.40
-42

[600]
p.201
-202

Ex. 18: Suite de Fibonacci $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2$
 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

Rmq. 19: Toutes suites réelles récurrentes linéaires d'ordre n peut être vue comme une suite vectorielle d'ordre n .

Si $\forall n \geq n \quad u_n = a_0 u_{n-1} + \dots + a_{n-1} u_{n-n}$ on peut $X = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-n+1} \end{pmatrix}$ on a $X_{n+1} = AX_n$. Par réc. $X_n = A^n X_0$.

II. Points fixes: (E, ||. ||) Banach

a) Théorème du point fixe

Def. 1: $f: E \rightarrow E$ continue on dit que $a \in E$ est un point fixe de f si $f(a) = a$.

Def. 2: $f: E \rightarrow E$ est dit contractante si $\exists k \in]0, 1[$ tq $\forall x, y \in E$
 $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$

Thm 22: (point fixe) $f: E \rightarrow E$ contractante alors f admet un unique point fixe $a \in E$. De plus $\forall x_0 \in E$, (x_p) définie par $x_{p+1} = f(x_p)$ converge vers a .

Prop. 23: Soit f contractante d'ordre k (x_p) tq $x_{p+1} = f(x_p)$ on a
 $\|x_p - a\| \leq k^p \|x_0 - a\|$. On a donc une convergence géométrique.

Rmq. 24: Le thm 22 est valable si on prend f continue et si il existe m tq $f^m = f \circ \dots \circ f$ soit contractante.

Rmq. 25: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable strictement monotone.

Cherche les x tq $f(x) = 0$ revient à chercher les points fixe de $f(x) = x - C f(x)$. Donc toutes suite (x_p) tq $x_{p+1} = f(x_p)$ va converger vers l'unique solution de $f(x) = 0$.

b) Classification des points fixes

I intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow I$ (x_p) tq $x_{p+1} = f(x_p)$ et a point fixe de f .

• $|f'(a)| < 1$: Soit k tq $|f'(a)| < k < 1$, $\exists E = [a-h, a+h]$ tq $|f'| < k$
 Donc f contractante sur E , $f(E) \subset E$

Prop. 26: Dans ce cas $\forall x_0 \in E \quad x_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} a$

Def. 27: Dans ce cas $\forall x_0 \in E$, a est dit point attractif.

• $|f'(a)| = 0$ et $f \in C^2$: $\exists M > 0$ tq $|f''| \leq M$ sur $E = [a-h, a+h]$

Prop. 28: $|x_p - a| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M \|x_0 - a\| \right)^{2^p}$

Def. 29: Dans ce cas $\forall x_0 \in E$, a est dit superattractif.

• $|f'(a)| > 1$: $\forall x \in [a-h, a+h]$, $|f(x) - a| > |x - a|$

Def. 30: Dans ce cas $\forall x_0 \in E$, a est dit répulsif.

Rmq. 31: a est un point fixe attractif de f^{-1}

• $|f'(a)| = 1$: Cas douteux

Ex. 32: $f(x) = \sin(x)$ $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$. $\sin(x) < x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

$x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ (x_p) décroissante minorée donc converge. La limite $f = \sin(f)$ donc $f = 0$

Ex. 33: $f(x) = \sinh(x)$ $x \in]0, +\infty[$. $\sinh(x) > x \quad \forall x > 0$. Le point fixe 0 est répulsif et $\forall x_0 > 0 \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = +\infty$

c) Comportement graphique

(x_p) tq $x_{p+1} = f(x_p)$. a un point attractif, $f \in C^1$ et $|f'(a)| < 1$

• $f'(a) > 0$ voir Figure 1

• $f'(a) < 0$ voir Figure 2

d) quelques applications de suites récurrentes

Prop. 34: Soit $b > 0$ $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est croissante, continue tq $\forall x \in]0, b[\quad f(x) < x$, $f(0) = 0$, $\exists \lambda > 0$ et $r \geq 1$ tq

$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$ (à $x \rightarrow 0$). Alors, $\forall x \in]0, b[$ tq $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

On a que (u_n) est à valeurs dans $]0, b[$ de limite nulle et

$u_n \sim \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}}$ où $K = \left(\lambda(r-1) \right)^{\frac{1}{r-1}}$

Ex. 35: Pour $f: x \mapsto \ln(1+x)$ on a $u_n = \frac{x}{n} + \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

[ISEN]
p. 318

DEV1

Def. 36: 2-icobarycentre g de $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ est $g = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$

Lemme 27: (Déterminant circulant) $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $w := e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{jk}$$

Prop. 38: P polygone du plan complexe de sommet $\{z_1, \dots, z_n\}$: $P_0 = P$ et P_{k+1} sont les polygones dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k . (P_k) cv vers icobarycentre de P . Figure 3

III Application à la résolution d'équation $f(x) = 0$.

a) Méthode de Newton

On cherche à résoudre de $f(x) = 0$ en supposant avoir x_0 une valeur première de cette racine. L'idée est de remplacer la courbe de f par la tangente en x_0 (Figure 4). On pose $p(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Si on suppose $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$, p est $\mathbb{C}^1$ au voisinage de a et $p'(a) = \frac{f'(a)}{f'(a)}$. $p(a) = a$ et a superattrahi.

Thm 39: f est $\mathbb{C}^2(I)$ ($I = [a-r, a+r]$) et $f' \neq 0$ sur I . $M := \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$. $h = \min(r, \frac{1}{M})$. Alors $\forall x \in [a-h, a+h]$ on a $|p(x) - a| \leq M|x - a|^2$ et $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$ $|x_p - a| \leq \frac{1}{M}|x_0 - a|^2$.

b) Méthode de la sécante

Dans certains cas f est difficile ou impossible à expliciter. On ne peut pas utiliser Newton. 2-^e idée est de remplacer f' par le taux d'accroissement de f sur $[x_0, x_1]$ (x_0, x_1 valeur approchée de a). Posons $\mathcal{E}_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. L'intersection de la sécante de f au point x_0, x_1 et l'axe des abscisses est $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\mathcal{E}_1}$. On itère ce procédé et on pose $x_p = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}$ $x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\mathcal{E}_p}$ (Figure 5)

Thm 40: f est $\mathbb{C}^2$, $f' \neq 0$, $I = [a-r, a+r]$. (x_p) suite de Fibonacci. Alors il existe $h, k > 0$, $\forall x_0, x_1 \in [a-h, a+h]$, $x_0 \neq x_1$ on a: $|x_p - a| \leq \frac{1}{k} |k \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)|^{2^p}$

c) Résolution d'un système linéaire: méthode itérative

On cherche à résoudre un système linéaire du type $Au = b$. on construit une suite de solution approché $(u_k)_k$ issue de la résolution d'un système linéaire plus simple.

Def. 41: $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On appelle décomposition régulière de A la donnée de $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ et $A = M - N$.

Construisons (u_k) by: $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et: $Mu_{k+1} = Nu_k + b$ ($k \in \mathbb{N}$)

On dit que cette méthode est convergente si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ (u_k) cv.

Thm 42: La méthode itérative associée à (M, N) de A converge si $\rho(M^{-1}N) < 1$ ($\rho = \max\{|x| : x \in \text{Sp}(A)\}$)

Méthode	M	N
Jacobi	D	D - A
Gauss-Seidel	D - E	F
Relaxation	$\frac{D}{w} - E$	$\frac{1-w}{w} D + F$
Gradient	$\frac{1}{2} I$	$\frac{1}{2} I - A$

$$A = \begin{pmatrix} & & -E \\ & D & \\ -F & & \end{pmatrix}$$

$w > 0$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

Références:

- [BOU] Gourdon, Analyse 3e ed.
- [ELAM] El Amrani, Suite et Σ jet
- [DEM] Demailly, Analyse numérique et eq. diff.
- [BER] Bernis, Analyse pour l'agreg: 40 dev
- [ISEN] Isenman, oral à l'agreg Δ I-traité à l'oral
- [DUM] Dumas, modélisation à l'oral de l'agreg

[DEM]
p. 108
-112

[DUM]
p. 167

DEV2

[DUM]
p. 169
-172

Annexe:

Fig. 1

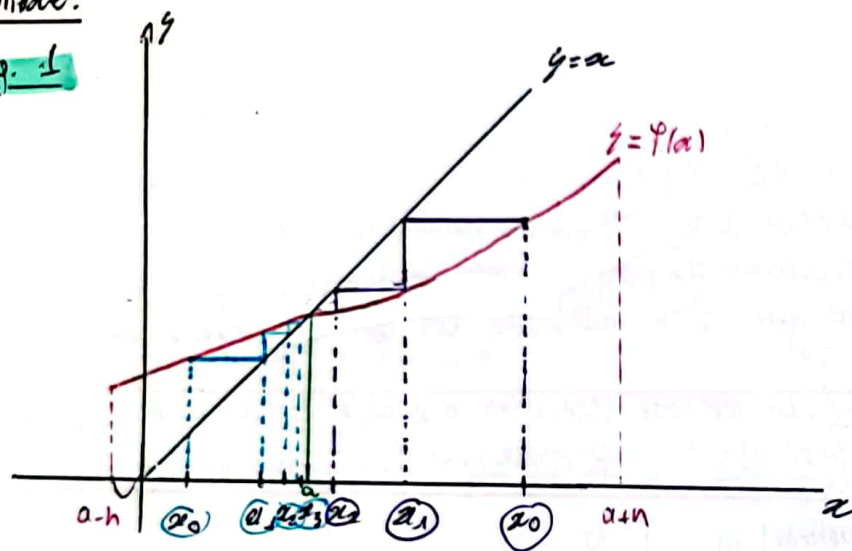


Fig. 2

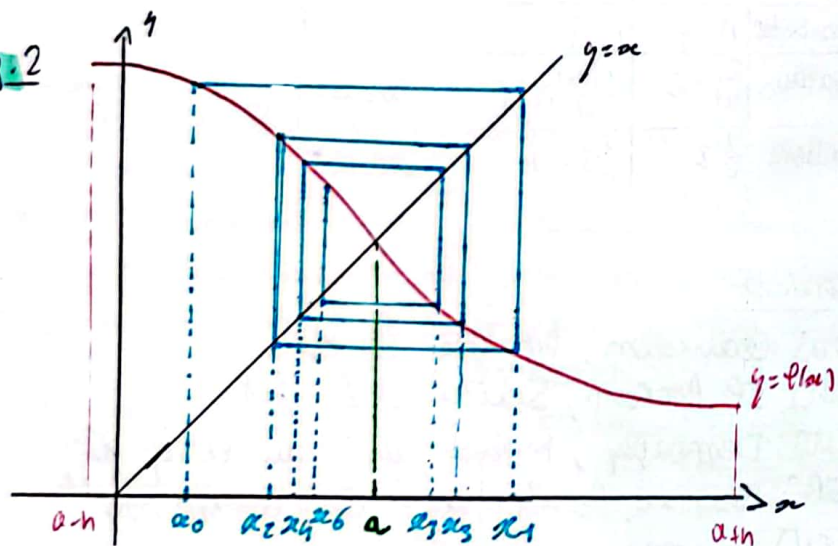


Fig. 3

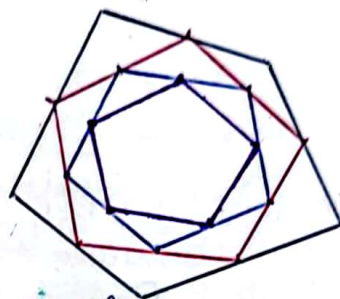


Fig. 4

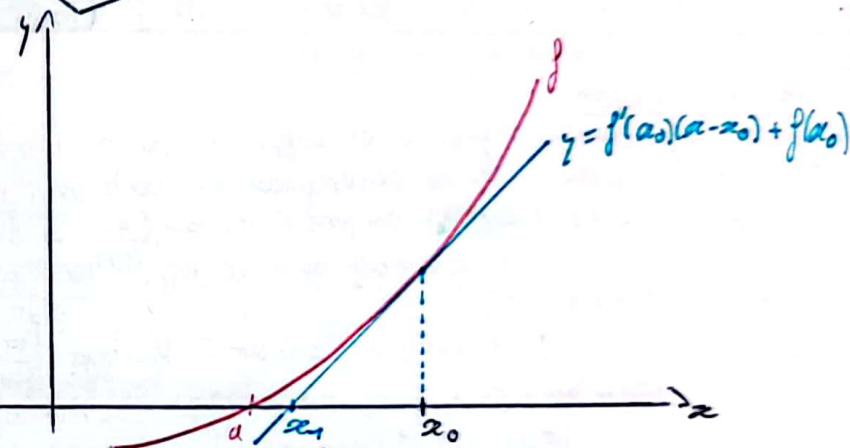


Fig. 5

