

223 : Suite numérique. Convergence, valeurs d'adhérence, etc et applis

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $l, l' \in \mathbb{K}$

I. comportement asymptotique des suites numériques

a) Convergence et limites

Def. 1: On dit que (u_n) admet pour limite P si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$

$$|u_n - P| \leq \varepsilon.$$

Ex. 2: La limite de $(1 + \frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est 1.

Thm. 3: (unicité de la limite) Si une suite numérique admet une limite alors celle-ci est unique.

Prop. 4: Toute suite convergente est bornée

Rmq. 5: $(1 - 1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais pas cv.

Prop. 6: Si $u_n \rightarrow P$ et $v_n \rightarrow P'$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u_n + v_n \rightarrow \lambda P + P'$

Prop. 7: Si $u_n \rightarrow 0$ et (v_n) bornée alors $u_n v_n \rightarrow 0$.

Thm. 8: (caractérisation séquentielle de la continuité). $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ continue si pour tout $(u_n) \subset \mathbb{K}$ $u_n \rightarrow P$ alors $f(u_n) \rightarrow f(P)$.

b) Valeur d'adhérence

Def. 3: On appelle sous suite extraite de (u_n) toutes suites $(u_{p(n)})$ où $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ stricte. P est appelée extraite.

Prop. 10: Si $(u_n) \rightarrow P$ alors toutes suites de (u_n) tend vers P .

Def. 11: On appelle valeur d'adhérence de (u_n) tout élément de $\mathbb{K}$ qui est limite d'une sous suite de (u_n) .

Prop. 12: Toute suite cv admet une unique valeur d'adhérence.

Ex. 13: $(-1)^n$ est dv car admet 2 v.a 1 et -1.

Rmq. 14: La réciproque de 12 est fautive, $(n(1 - (-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet que 0 pour dv.

Prop. 15: $u_n \rightarrow P$ si $u_{2n} \rightarrow P$ et $u_{2n+1} \rightarrow P$.

Prop. 16: Les ASE:

(i) P v.a. de (u_n)

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists m \geq p, |u_m - P| \leq \varepsilon$

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_p > 0$ où $A_p := \{u_n | n \geq p\}$

Prop. 17: L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$

on particulier c'est un fermé.

Prop. 18: Soit E un compact de $\mathbb{K}$ pour la distance d . Soit $(u_n) \subset E$ tq $d(u_n, u_{n+1}) \rightarrow 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

(*) P. 11

c) Le cas des suites réelles $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Prop. 19: Si (u_n) et $(v_n) \subset \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Thm. 20: (des gendarmes) Si $(a_n), (b_n)$ sont 2 suites réelles ayant pour même limite $P \in \mathbb{R}$ et si $a_n \leq u_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim u_n = P$.

Thm. 21: (limite monotone) Si $(u_n) \nearrow$ majorée alors $\lim u_n = \sup u_n$

Si $(u_n) \searrow$ minorée alors $\lim u_n = \inf u_n$.

Def. 22: (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si $(u_n) \nearrow, (v_n) \searrow, \lim (u_n - v_n) = 0$

Thm. 23: Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont cv et ont même limite. En notant P cette limite $u_n \leq P \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ex. 24: $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(1 + \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

Def. 25: On pose $\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{k \geq n} u_k)$ et $\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf_{k \geq n} u_k)$
Ces éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés limite supérieure et limite inférieure.

Prop. 26: $\liminf u_n = \sup_n (\inf_{k \geq n} u_k) \leq \limsup u_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} u_k)$

Prop. 27: $(u_n) \subset \mathbb{R}$, $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ sont les plus petites et plus grandes valeurs d'adhérence de (u_n) . De plus $(u_n) \subset \mathbb{R}$ cv donc $\mathbb{R}$ si $\liminf u_n = \limsup u_n$

d) Suites de Cauchy

Def. 28: On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$

Prop. 29: 1) Toutes suites convergentes est de Cauchy

2) Toute sous suite de Cauchy est de Cauchy

3) Toute suite de Cauchy est bornée

Prop. 30: Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est convergente.

Rmq. 31: Dans $\mathbb{R}$, toutes suite de Cauchy converge.

Prop. 32: Dans $\mathbb{C}$, toutes suite de Cauchy converge.

(*) **Thm. (Bolzano-Weierstrass)** Soit K un compact de $\mathbb{K}$. De toutes suites de points de K on peut extraire une sous suite cv.

[G003]
p. 66
DEV 1

[ELAM]
p. 19

[ELAM]
p. 32
-33

[ELAM]
p. 353
ou

[BRIS]
p. 46
ou [AM]
p. 77

[ELAM]
p. 39
-35

[G003]
p. 23

II. Suites remarquables

a) Séries numériques

Def. 33: On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \dots + u_n. \text{ On note } \sum u_n \text{ cette série.}$$

Def. 34: On dit que $\sum u_n$ cv si (S_n) cv.

Prop. 35: Si $\sum u_n$ cv alors $u_n \rightarrow 0$.

Def. 36: $\sum u_n$ est dite dcv si $\sum |u_n|$ cv

Prop. 37: $dcv \Rightarrow cv$

Jusqu'à la fin de cette partie on considère des séries à termes positifs.

Thm. 38: (Règle de comparaison) Si $u_n \leq v_n$ alors,

1) Si $\sum v_n$ cv alors $\sum u_n$ cv et $\sum u_n \leq \sum v_n$

2) Si $\sum u_n$ dv alors $\sum v_n$ dv.

Thm. 39: (Règle d'équivalence) Si $u_n \sim v_n$, alors:

1) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

2) En cas de cv, les restes sont équivalents

3) En cas de dv, les sommes partielles sont équivalentes

Thm. 40: (Règle de domination) Si $u_n = o(v_n)$ alors:

1) $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) En posant $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$, $R_n = o(r_n)$

Thm. 41: (Critère de Riemann) $\sum \frac{1}{n^a}$ cv si $a > 1$

Méthode 42: On peut se servir des critères de Riemann pour trouver des relations de domination / équivalence pour prouver la cv ou non cv.

Thm. 43: (Moyenne de Césaro) Si $(u_n)_n$ tend vers P alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow P$

Thm. 44: (équivalent de Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

b) Suites récurrentes

Prop. 45: Soit $b > 0$, $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est croissante continue

tg $\forall x \in]0, b[$ $f(x) < x$, $f(0) = 0$ et si $\exists \lambda > 0$ et $r > 1$ tg

$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$. Alors $\forall x \in]0, b[$ tg $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

On a que (u_n) est à valeurs dans $]0, b[$ de limite nulle et

$$u_n \sim \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}} \text{ où } K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$$

Ex. 46: Pour $f: x \mapsto \ln(1+x)$ on a $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

Prop. 47: (Somme de la géométrie) $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et $(x_n) \in [0, 1]$ tg $x_{n+1} = f(x_n)$. (d.n) cv si $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$

Thm. 48: (Point fixe) Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contractante alors φ admet un point fixe. De plus pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ alors $x_n \rightarrow a$.

III. Applications

a) Vitesse et accélération de convergence $k=1R$

Def. 49: On suppose que $u_n \rightarrow P$. Si $\frac{u_{n+1} - P}{u_n - P} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

On dit que (u_n) cv lentement si $|\lambda| = 1$

On dit que (u_n) cv géométriquement de rapport λ si $\lambda \in]0, 1[$

On dit que (u_n) cv rapidement si $\lambda = 0$.

Soit $r > 1$. On dit que (u_n) cv à P ordre r si $\frac{u_{n+1} - P}{u_n - P}$ est bornée.

Ex. 50: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_n$ cv lentement vers e .

Ex. 51: $(\sin(\frac{\pi}{n}))_n$ cv lentement vers π ; $(2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}))_n$ cv géométriquement de rapport $\frac{1}{2}$.

Def. 52: Si (u_n) et (v_n) cv vers P on dit que la cv de (v_n) cv plus rapidement que (u_n) si $v_n - P = o(u_n - P)$

Thm. 53: (accélération de Richardson) Si (u_n) cv vers P géométriquement de rapport $\lambda \in]-1, 1[$. Alors (v_n) tg $\forall n \in \mathbb{N} v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$ cv plus vite que (u_n) vers λ .

Prop. 54: Si (u_n) admet un dev. asympt. $u_n = P + a\lambda^n + o(\lambda^n)$

où $a \neq 0$ et $|\lambda| \in]0, 1[$ alors $u_n \rightarrow P$ de manière géo. de rapport λ .

Prop. 55: Si (u_n) admet un dev. asympt.

$$u_n = P + a\lambda^n + b\mu^n + o(\mu^n)$$

où $a, b \neq 0$ $\mu \in]-1, 1[$.

Alors la suite accélérée par Richardson (v_n) admet un dev. asympt.

$$v_n = P + b'\mu^n + o(\mu^n) \quad b' \neq 0$$

La cv de (v_n) vers P est géométrique de rapport μ

Ex. 56: la suite accélérée de $(2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}))_n$ est $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$

et (V_n) tend vers π géométriquement de rapport $\frac{1}{16}$.

b) Résolution d'équation numérique

Méthode de Newton:

on cherche la racine α d'une équation $f(x)=0$ en supposant avoir x_0 une valeur grossière de cette racine. L'idée est de remplacer la courbe de f par sa tangente en x_0 (Fig. 1). Posons

$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Si $f \in C^2$ et $f'(x) \neq 0$. Alors φ est φ' au voisinage

de α , on a $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi'(\alpha) = 0$ (a point fixe super attractif)

Thm. S7: Si $f \in C^2([a-r, a+r])$ et $f' \neq 0$ sur $I = [a-r, a+r]$.

Soit $M = \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ et $h = \min(r, \frac{1}{M})$. Alors $\forall x \in [a-h, a+h]$

on a $|\varphi(x) - \alpha| \leq M|x - \alpha|^2$, et $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$:

$$|x_p - \alpha| \leq \frac{1}{M} (M|x_0 - \alpha|)^{2^p}$$

Méthode de la sécante

Dans certains cas f' est difficile ou impossible à expliciter, on ne peut pas utiliser Newton. L'idée est de remplacer f' par la tangente d'accroissement de f sur x_0, x_1 (où x_0, x_1 valeur approchée de α). Posons $\tau_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. L'intersection de la sécante de f aux points x_0, x_1 , et l'abscisse est $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\tau_1}$ (Figure 1)

On itère ce procédé, on pose $\tau_p = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}$, $x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\tau_p}$

Thm. S8: Si $f \in C^1(I)$ et $f' \neq 0$ sur $I = [a-r, a+r]$. En notant (p_p) la suite de Fibonacci. Alors $\exists h, K > 0$, $\forall x_0, x_1 \in [a-h, a+h]$, $x_0 \neq x_1$, on a: $|x_p - \alpha| \leq \frac{1}{K} (K \max(|x_0 - \alpha|, |x_1 - \alpha|))^{p_p}$

Figure 1:

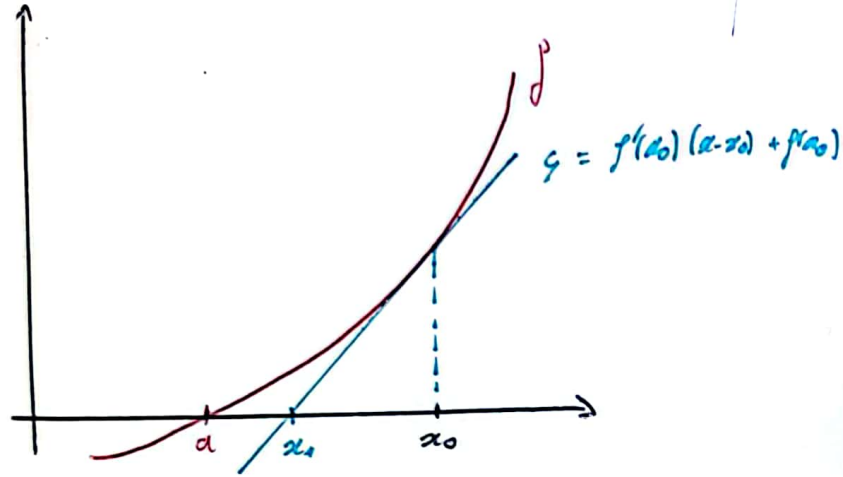
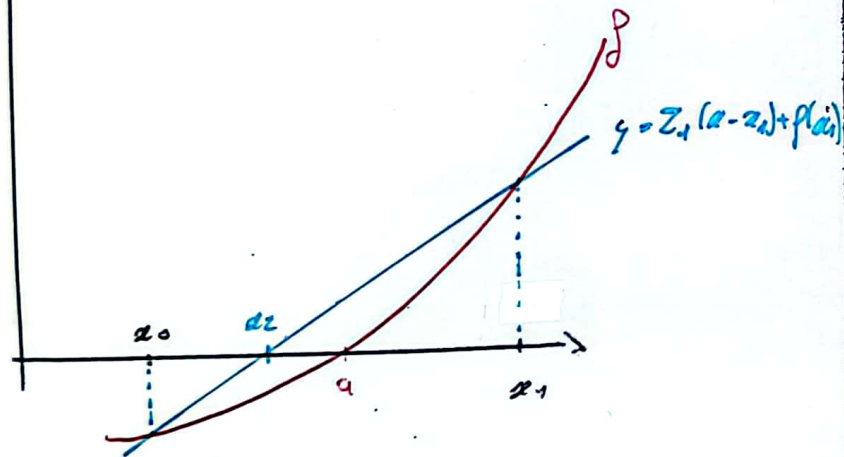


Figure 2:



Références:

- [ELAM]: El Amrani, suite et I
- [GOU]: Gouder, Analyse 3ad
- [BRI]: Brieme, Régis, Intégration
- [BER]: Bernis, des agrégés
- [FRA]: Francin, Analyse 1
- [DEM]: Demailly, Anna math et équations diff
- [DAN]: Denzler, Analyse pour l'agreg.