

221: Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Ex et appli.

I. Généralités et théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def. 1: $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$ une edo d'ordre n de type résolue et une équation de la forme:

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) \text{ pour } (t, y, \dots, y^{(n-1)}) \in \mathcal{R}$$

Def. 2: Une solution de cette équation est un couple (I, γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ n fois dérivable tq

$$\begin{cases} \forall t \in I, (t, \gamma(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)) \in \mathcal{R} \\ \forall t \in I, \gamma^{(n)}(t) = f(t, \gamma(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)) \end{cases}$$

Intéressons nous au cas $n=1$: Soit $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in \mathcal{R} \quad (E)$$

Def. 3: Une solution de (E) est un couple (I, γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ dérivable tq

$$\begin{cases} \forall t \in I, (t, \gamma(t)) \in \mathcal{R} \\ \forall t \in I, \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) \end{cases}$$

Def. 4: Soit $(t_0, y_0) \in \mathcal{R}$. Le problème de Cauchy avec données initiales (t_0, y_0) consiste à trouver la (les) solution(s) de (E) sur un intervalle I tq $\gamma(t_0) = y_0$.

La résolution du problème de Cauchy est équivalente à la résolution d'une équation intégrale:

Prop. 5: $(t_0, y_0) \in \mathcal{R}$. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ est solution de (E) tq $\gamma(t_0) = y_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma \text{ est continue} \\ \forall t \in I, (t, \gamma(t)) \in \mathcal{R} \\ \forall t \in I, \gamma(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \end{cases}$$

Prop. 6: (Gronwall différentiel) I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $w \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tq $\forall t \in I$ $w'(t) \leq v(t)w(t)$

alors $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$: $w(t) \leq w(t_0) e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$

Prop. 7: (Gronwall intégrale) I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soit $v \geq 0$ et $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$:

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s) ds$$

Alors $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$: $u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$

Thm. 8: (Cauchy-Lipschitz linéaire) I intervalle de $\mathbb{R}$. $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$. $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe unique solution de $y' = A(t)y + B(t)$ tq $y(t_0) = y_0$

Cor. 9: I intervalle de $\mathbb{R}$. $a: I \rightarrow \mathbb{K}$. $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ $\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I :

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

II. Résolution edl à coef. constants

a. Cas homogène: systèmes d'edl

Étudions l'équation homogène suivante:

$$y' = Ay \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad y \in \mathbb{K}^N \quad (I_H)$$

Def. 10: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ posons $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

Prop. 11: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $t \in \mathbb{R}$ posons $\phi(t) = e^{tA}$ alors ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(t) = A\phi(t) = \phi(t)A$

Prop. 12: (Propriétés de l'expp de matrice):

- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
- $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- $(e^A)^* = e^{A^*}$

Prop. 13: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions de (I_H) sont les:

$$y(t) = e^{tA} C \quad \text{où } C \in \mathbb{K}^N.$$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^N$ la solution de (I_H) tq $y(t_0) = y_0$ s'écrit

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Ex. 14: Les solutions de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) \\ y(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) + \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) \end{cases}$$

Def: On dit que (E) est linéaire lorsque $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B: I \rightarrow \mathbb{K}^N$

[BER]
p. 18-19

DEV 1
[BER]
p. 30

[BER]
p. 47

[BER]
p. 45-47

[BER]
p. 50

b- Cas non homogène: Méthode de la variation de la constante

Étudions l'équation suivante:

$$y' = Ay + B(t) \quad A \in M_N(K), y \in K^N, B \in C(I, K^N)$$

Méthode 15: Pour résoudre (I) on considère d'abord les sol. de (I_h) qui sont de la forme: $t \mapsto e^{tA} C, C \in K^N$.

On cherche une solution de (I) sous la forme $y(t) = e^{tA} c(t)$ $c: I \rightarrow K^N$. En dérivant y on trouve que y est solution de (I) si $c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} B(s) ds$.

Prop. 16: Cette méthode nous donne une formule pour résoudre (I) appelée formule de Duhamel:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$$

Remq. 17: La méthode de la variation de la constante est toujours valable même si A dépend de t .

c- Ede d'ordre n à coef. constant.

considérons:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t) \quad (t, y) \in I \times K \quad (I_n)$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in K, I$ intervalle de $\mathbb{R}$.

Posons:

$$Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors mettre (I_n) sous la forme suivante:

$$Y' = AY + B(t) \quad (I')$$

Remq. 18: A est une matrice compagnon.

Def. 19: Le pol. car. associé à (I_n) est $P(\lambda) = \lambda^n + \dots + a_0$ (qui est K_n). L'équation caractéristique associée à (I_n) est $P(\lambda) = 0$.

Thm. 20: I intervalle de $\mathbb{R}, a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ et $b \in C(I, K)$. $t_0 \in I$ et $y_0, \dots, y_{n-1} \in K$. Alors il existe une unique solution y de (I_n) $t \mapsto y(t)$ $y(t_0) = y_0$
 $y^{(j)}(t_0) = y_{j-1}$

D'abord étudions le cas homogène:

$$y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times K \quad (I_{n,h})$$

Thm. 21: Supposons que les a_i sont dans $\mathbb{C}$. Notons $r_1, \dots, r_p$ les racines complexes de P et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités. Alors les solutions de (I_{n,h}) sont:

$$y(t) = (\lambda_{1,1} t^{m_1-1} + \dots + \lambda_{1,m_1}) e^{r_1 t} + \dots + (\lambda_{p,1} t^{m_p-1} + \dots + \lambda_{p,m_p}) e^{r_p t}$$

où $\lambda_{j,k} \in \mathbb{C}$.
Thm. 22: Supposons que les a_i de (I_{n,h}) sont réelles. Notons $r_1, \dots, r_p$ les racines réelles de multiplicité $m_1, \dots, m_p$ et $r_{p+1}, \dots, r_q$ les racines complexes (non réelles) distinctes de multiplicité $m_{p+1}, \dots, m_q, m_{p+1}, \dots, m_q$ de P (pol. car. associé à (I_{n,h})). Notons $r_k = \rho_k + i\sigma_k$ ($k \in \{p+1, \dots, q\}$) avec ρ_k et σ_k les parties réelle et imaginaire de r_k .

Les solutions réelles de (I_{n,h}) sont:

$$y(t) = (\lambda_{1,1} t^{m_1-1} + \dots + \lambda_{1,m_1}) e^{r_1 t} + \dots + (\lambda_{p,1} t^{m_p-1} + \dots + \lambda_{p,m_p}) e^{r_p t} \\ + (\mu_{p+1,1} t^{m_{p+1}-1} + \dots + \mu_{p+1,m_{p+1}}) e^{\rho_{p+1} t} \cos(\sigma_{p+1} t) + \dots \\ + (\mu_{q,1} t^{m_q-1} + \dots + \mu_{q,m_q}) e^{\rho_q t} \cos(\sigma_q t) \\ + (\mu_{p+1,1} t^{m_{p+1}-1} + \dots + \mu_{p+1,m_{p+1}}) e^{\rho_{p+1} t} \sin(\sigma_{p+1} t) + \dots \\ + (\mu_{q,1} t^{m_q-1} + \dots + \mu_{q,m_q}) e^{\rho_q t} \sin(\sigma_q t)$$

où $\lambda_{j,k}, \mu_{j,k}$ sont des réelles quelconques.

[BEP]

p. 57

-62

Rmq.23: Pour résoudre (L_n) il faut résoudre (L_n, u) , prendre une solution de (L_n, u) et ajouter une solution particulière de (L_n) . Pour trouver une solution particulière il y a parfois des astuces. Sinon il faut utiliser la méthode de la variation de la constante qui peut être longue en calcul.

III. EDP : cas général

a. Structure des solutions I intervalle de $\mathbb{R}$

$A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$

$$y' = A(t)y + B(t) \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (Y)$$

$$y' = A(t)y \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (Z)$$

Def.24: Soient $y_1: I_1 \rightarrow \mathbb{K}^N$, $y_2: I_2 \rightarrow \mathbb{K}^N$ 2 solutions de (Z) ($I \subset I_1$). On dit que y_2 est un prolongement strict de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Def.25: Une solution est dite maximale si elle n'admet pas de prol. strict.

Prop.26: Soit l'ensemble des sol. maximales de (Z) est un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$.
• $\forall t_0 \in I$, $\Phi_{t_0}: S_{t_0} \rightarrow \mathbb{K}^N$ est un iso. d'ev. • S_{t_0} est de dim N.
 $y \mapsto y(t_0)$

Prop.27: L'ensemble S des solutions de (Z) est un $\mathbb{K}$ -espace affine de direction S_{t_0} .

Prop.28: Supposons que $A(t)$ est constante. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Notons v_k les vecteurs propres associés avec $v_p \lambda_k$. Alors une base de S_{t_0} est donnée par les $t \mapsto e^{\lambda_k t} v_k$ $k \in \{1, \dots, N\}$

Ex.29: Les sol. de $y' - 2y + y = 0$ sont les $t \mapsto a e^t + b t e^t$ et si on suppose de plus que $y(1) = 0$ alors la solution est $y(t) = (\frac{t^2}{2} + t(e-1) + e + \frac{1}{2}) e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Ex.30: les solutions de $y' + ty = t$ sont $y(t) = \lambda_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + 1$

Rmq.31: Pour trouver une solution particulière on peut essayer d'injecter une série entière dans l'équation différentielle

Ex.32: les solutions de $x y'' + y y' - w^2 t y = 0$ ($w \in \mathbb{R}$) sont
les $y(t) = \frac{1}{2} (\lambda \operatorname{erf}(wt) + \mu \operatorname{erf}(wt))$

b. Résolvante d'un système linéaire

Def.33: $\forall t_0, t \in I$ on pose $R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}: \mathbb{K}^N \rightarrow S_{t_0} \rightarrow \mathbb{K}^N$
 $v \mapsto y \mapsto y(t)$
 R est appelée résolvante de (Z).

Prop.34: $R(t, t_0)(v) = y(t)$ où y est la solution de (Z) tq $y(t_0) = v$.

Rmq.35: $R(t, t_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$. Il peut être identifié à la matrice inversible qui lui est canoniquement associée dans $M_N(\mathbb{K})$.

Prop.36: • $\forall t \in I$, $R(t, t) = I_N$ • $\forall t_0, t_1, t_2 \in I$, $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
• $R(t, t_0)$ est la solution dans $M_N(\mathbb{K})$ de $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t)$ où $R(t_0) = I_N$

Prop.37: La solution de $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = v_0 \end{cases}$ s'écrit $y(t) = R(t, t_0)(v_0)$

c. Wronskien d'un système de solution

Def.38: Le wronskien d'un système de N solutions $y_1, \dots, y_N$ de (Z) est $W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_N(t))$

Prop.39: Posons $v_j = y_j(t_0)$. Alors $y_j(t) = R(t, t_0)(v_j)$.

$$W(t) = \det(R(t, t_0)) \det(v_1, \dots, v_N)$$

Prop.40: $\Delta(t) := \det(R(t, t_0))$. $\Delta'(t) = \operatorname{Tr}(A(t)) \Delta(t)$ et donc
 $W(t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{Tr}(A(u)) du} \det(v_1, \dots, v_N)$

Prop.41: Avec la méthode de variation de la constante on trouve
 $y(t) = R(t, t_0)(v_0) + \int_{t_0}^t R(t, u) B(u) du$

IV. Portrait de phase en dimension 2

Étudions l'allure des trajectoires des solutions du système linéaire $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i.e $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si $\det(A) \neq 0$, l'allure des trajectoires va dépendre des vp. de A . En notant λ, μ des vp. d'associe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$. On note e_λ, e_μ les 2 vecteurs colonnes de P qui forment une base de $\mathbb{R}^2$.

• $\lambda \neq \mu$ et de même signe Fig 1a et Fig 4b
• $\lambda \neq \mu$ de signe opposé Fig 2
• $\lambda = \mu$ A diagonalisable Fig 3a 3b
• $\lambda = \mu$ A non diag. Fig 4a Fig 4b
• λ, μ complexes Fig 6, 7, 8

A diagonalisable, λ, μ réels
A non diag. λ, μ réels

[BER]
p.14-19

[BER]
p.34-35

[BER]
p.52

[BER]
p.36-35

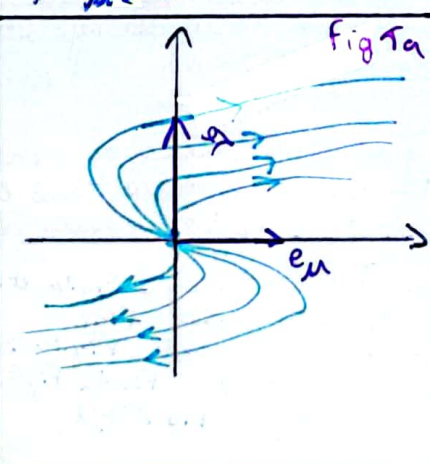
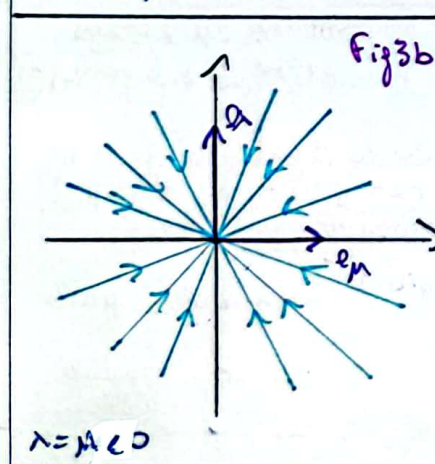
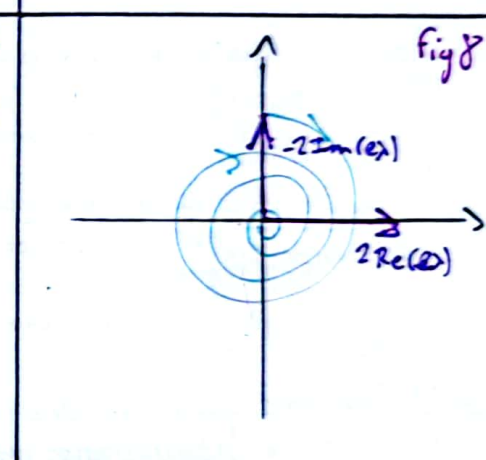
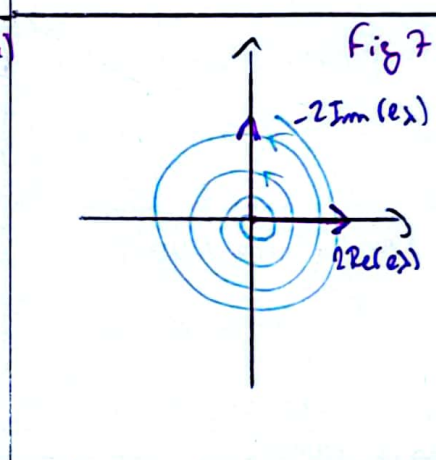
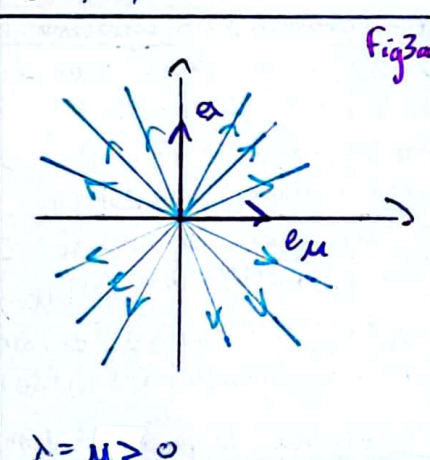
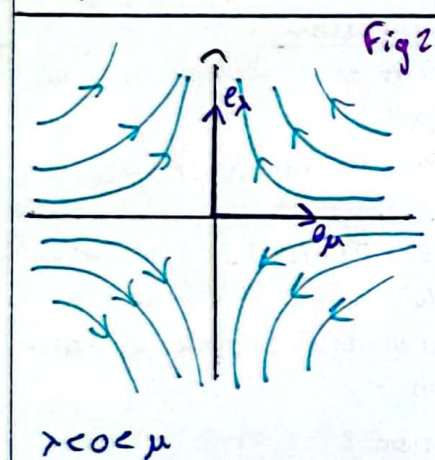
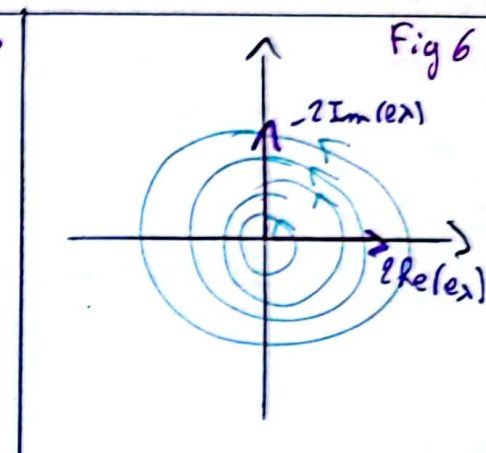
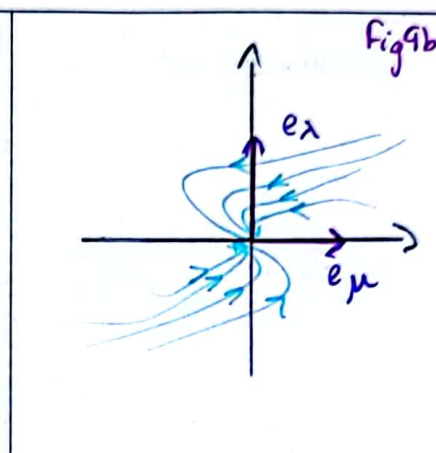
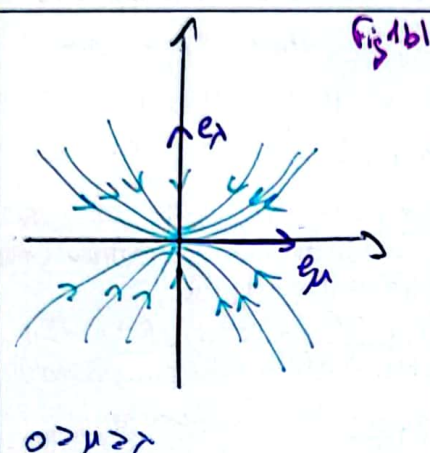
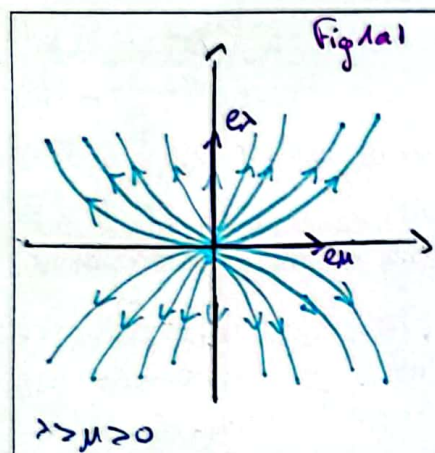
[BER]
p.73

[DAN]
p.538
DENZ

[DEM]
p.228
-229

[DEM]
p.230
-232

[BER]
p.203
-212



Références:

[BEK]: Berthelin, équas diff

[DEM]: Demailly, Ana. num. et equa. diff.

[DAM]: Demailly, Analyse pour l'agreg.