

213: Application différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ex et appl:

E, F $\mathbb{R}$ -evm de dim. finie. $U \subset E$ ouvert non vide, $f: U \rightarrow F$
 $g: U \rightarrow F$

I. Autours de la différentiabilité

a) Def et 1^{er} ppt

Def. 1: $a \in U$, f est dite différentiable en a si $\exists f' \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $f(a+h) = f(a) + f'(h) + o(\|h\|)$. f' est appelée différentielle en a notée df_a .

Prop. 2: Si la différentielle de f en a existe alors elle est unique.

Rmq. 3: A priori df_a dépend des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Mais on est en dimension finie, avec l'équivalence des normes on peut moy df_a ne dépend pas de la norme.

Rmq. 4: df_a doit être linéaire et continue, or en dim. finie il suffit que df_a soit linéaire.

Ex. 5: Si f est linéaire alors f est différentiable ($f(a+h) = f(a) + f(h)$) $df_a = f$.

Ex. 6: $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable $df_{(X_0, Y_0)}(H, K) = HX_0 + X_0K$
 $(X, Y) \mapsto XY$

Prop. 7: Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Prop. 8: Si f, g sont différentiable en $a \in U$ alors:
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$

Prop. 10: E, F, G des $\mathbb{R}$ -evm $U \subset E$ et $V \subset F$ 2 ouverts.
 $f: U \rightarrow F$ et $g: V \rightarrow G$ tq $f(U) \subset V$. Si f différentiable en a en g différentiable en $f(a)$

alors $g \circ f: U \rightarrow G$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Rmq. 11 On déduit que $d(fg)_a = df_a g + f dg_a$.

b) Accroissements finis

Thm. 12: (IAF) $a, b \in U$ tq $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\} \subset U$.
 Si f continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, b[$, si $\exists M > 0$ tq $\|df_c\| \leq M \forall c \in]a, b[$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$.

Rmq. 13: Le thm des accroissements finis est vrai que en dim. 1. En effet $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses $f(a) = f(b)$ or $f'(t) \neq 0$.

Prop. 14: Si U est convexe, f différentiable sur U et si $\|df_c\| \leq M \forall c \in U$ alors $\forall a, b \in U \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$.

c) Gradient

Def. 16: Si E est euclidien, f différentiable en $a \in U$. Alors $df_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, $\exists ! v \in E$ tq $df_a(h) = \langle v, h \rangle \forall h \in E$. v s'appelle gradient de f en a et est noté $\text{grad}_a f$.

Rmq. 17: L'existence et l'unicité du gradient est assurée par le thm de Riesz.

Thm. 18: $f_k: U \rightarrow F$ une suite d'applications différentiables sur U . Si (f_k) cvt sur U , $(df_k)_a$ cvt dans $\mathcal{L}(E, F)$ uniformément. Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ est différentiable et $d(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)_a = \lim_{k \rightarrow \infty} df_k|_a$.

d) Dérivées partielles

Def. 19: $a \in U, v \in E$, si $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow F$ est dérivable en $t=0$ $t \mapsto f(a+tv)$ alors f est dite dérivable en a selon le vecteur v . On note alors $f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$.

[GOU]
p. 327
- 328.

peut être changé
[GOU]
p. 325

[ACU]
p. 117
A mettre dans a)
j'ai oublié

[600]
p. 324

Prop. 20: Si f est différentiable en tout point de a , alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a $f'_v(a) = df_v(a)$ $\forall v \in E$.

[600]
p. 328

Rmq. 21: La réciproque est fautive $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
et dérivable selon tout vecteur en $(0,0)$ $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Mais f n'est même pas continue.

pas obligé de prouver

Pour la fin de cette sous-partie on prend $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique

Def. 22: $a \in U$. Si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ f est dérivable en a selon e_i , on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i et on note $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

[600]
p. 325

Rmq. 23: Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ existe } \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \quad \text{grad}_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

où (dx_i) est la base duale dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Thm. 24: Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en un $a \in U$ alors f est différentiable en a et $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$ $F = \mathbb{R}^m$

[600]
p. 327

Def. 25: $a \in U$. Si f admet une dérivée partielle en a $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $(e_1, \dots, e_m)$ base canonique de $\mathbb{R}^m$ tq $df_a(e_j) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$
 $J_a = \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ appelée matrice Jacobienne de f en a

Rmq. 26: La réciproque est fautive. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
et différentiable en 0 , mais f' n'est pas continue en 0 . $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d) Différentiel d'ordre supérieur

Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une dérivée partielle d'ordre p par la relation:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1 \dots \partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1 \dots \partial x_{p-1}} \right)$$

Def. 27: f est dite de classe $\mathcal{C}^p$ si ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U .

Thm. 28 (Schwarz): $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues en a alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Rmq. 29: La continuité est essentielle. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

les dérivées partielles existent mais ne sont pas égales. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cor. 30: $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^p$ alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

Def. 31: On suppose que f est $\mathcal{C}^2$ en $a \in U$ et $F = \mathbb{R}$. On appelle matrice Hessienne de f en a :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\mathbb{R})$$

Rmq. 32: Cette matrice est symétrique d'après thm de Schwarz.

II - Théorèmes principaux

a) Extrema $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$

Prop. 33: Si f admet un extremum relatif en $a \in U$ et f différentiable en a alors $df_a = 0$

Def. 34: Un tel point est appelé point critique

Thm. 35: Soit $f \in \mathcal{C}^2$, $a \in U$ tq $df_a = 0$

(i) Si f admet un minimum (maximum) relatif en a alors

[600]
p. 326

[600]
p. 329

[600]
p. 336

a
mettre
à la
fin
de cette

$U_f(a)$ est positive (négative)

• Si $U_f(a)$ est définie positive (négative) alors f admet un minimum (maximum) relatif en a .

Thm. 36: (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $M := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$

Si $f|_M$ admet un extremum relatif en $a \in M$ et si les formes linéaires $dg_1, a, \dots, dg_r, a$ sont linéairement indépendantes, Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tq $df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \dots + \lambda_r dg_{r,a}$

Def. 37: Les (λ_i) sont appelés multiplicateurs de Lagrange

Rem. 38: (dg_i, a) sont linéaires donc les (λ_i) sont uniques

b) Théorèmes d'inversion

Thm. 39 (Inversion locale) f est $\mathcal{C}^1$. Si $\exists a \in U$ tq df_a soit un isomorphisme bicontinuo de $E \rightarrow F$. Alors $\exists V$ un voisinage ouvert de a et W un voisinage ouvert de $f(a)$ tq:

- $f|_V : V \rightarrow W$ soit une bijection
- $g : W \rightarrow V$ est continue
- g est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in V \quad dg_{g(x)} = df_x^{-1}$

Cor. 40: $f \mathcal{C}^1$ tq $\forall x \in U \quad df_x$ est inversible bicontinuo. Alors f est une application ouverte.

Thm. 41: f injective $\mathcal{C}^1$. ASSE:

- (i) $\forall x \in U, df_x$ inversible et bicontinuo
- (ii) $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est $\mathcal{C}^1$

Def. 42: U, V 2 ouverts de $\mathbb{R}^n$. $f : U \rightarrow V$ est dit $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme si f est bij. $\mathcal{C}^k$ et $f^{-1} \mathcal{C}^k$.

Ex. 43: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tq $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféo. locale mais pas globale.

Def. 45 E euclidien. $f : E \rightarrow E$ strictement monotone si $\exists k > 0$ tq $\forall x, y \in E \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$

Prop. 45: E euclidien. $f : E \rightarrow E \mathcal{C}^1$.

- f strictement monotone si $\exists k > 0$ tq $\forall x \in E, \forall h \in \langle df_x, h \rangle, h \geq k \|h\|^2$
- Si f est strictement monotone alors f est en $\mathcal{C}^1$ diff'o.

c) Théorème des fonctions implicites

Thm. 46: (fonction implicite) $E = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, F = \mathbb{R}^q$. A ouvert de E

$f = (f_1, \dots, f_p) : A \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^q$

$(a, b) \in A$, si $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \end{bmatrix}$ est non nul. Alors il existe:

- un voisinage ouvert U' de a , V ouvert de W de $f(a, b)$ un voisinage ouvert de $f(a, b)$
- une application $P : U' \times W \rightarrow \mathbb{R}^q \mathcal{C}^k$ vérifiant
- $\forall x \in U', \forall y \in W, P(x, y)$ est l'unique solution y de $f(x, y) = z$ tq $(x, y) \in V$

Ex. 47: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \sin(y) + x^2 y + x^2$. $\exists U, V$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$

$P : U \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$ tq $\forall x \in U \quad P(x)$ est l'unique $y \in V$ tq $f(x, y) = 0$

III. Exemples et applications

a) Différentiabilité et connexité

Thm. 48: Soit $U \subset E$ ouvert connexe, $f : U \rightarrow E$ différentiable tq $df_x = 0$ alors f est constante sur U

Thm. 49: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien, $f : E \rightarrow E \mathcal{C}^1$ tq $\forall x \in E, df_x$ est une isométrie alors f est une isométrie affine

b) Quelques propriétés sur les fonctions holomorphe et harmonique

Thm. 50: $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Posons u, v tq $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ f est holomorphe si u, v sont $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Def. 51: $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq les dérivées partielles d'ordre 2 existe. f est dite harmonique si $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ (Δf)

Prop. 52: Si f est holomorphe et $u, v \in \mathcal{C}^2$ alors u, v sont harmoniques.

Thm. 53: (Principe du maximum) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^2$. Si f est harmonique

alors $\forall x \in B(0,1) \quad \min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$