

Dans toute cette leçon, on considère $(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.

1) Indépendance d'événements:

Définition 2 : On dit qu'une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante lorsque $\forall$ sous-ensemble fini $I' \subset I$:

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$$

Contre exemple li: A est indépendant de B et C mais $P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B \cap C)$.

Définition 6 Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de sous-trigones de $\mathcal{T}$.

$$A(A_i) \in \pi \prod_{i \in I} \mathbb{R}_i, \quad P(A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i),$$

$\sigma(A)$ est indépendant de $\sigma(B)$, A est indépendant de B pour

Alors $\neg (A_{f,i} \in S)$ et $\neg (P_{g,i} \in U)$ sont indépendantes.

Définition 9 : On dit que des variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes lorsque les lois $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ sont indépendantes.

Proposition 15 : Un vecteur gaussien est entièrement caractérisé par son vecteur moyen $m = (E(x_1), \dots, E(x_d))$ et son matrice de covariance $\Gamma = (E((x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j))))$

Proposition 20: Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$ de matrice de covariance Γ . Si les composantes de X sont deux-à-deux non corrélées, alors $(X_1, \dots, X_d)$ est indépendante.

III) Applications illicites de l'indépendance

1) Loi de 0-1 de Kolmogorov

Théorème 21: Soient S un ensemble infini et $(\mathcal{P}_i)_{i \in S}$ une famille de tribus indépendantes sur la loi P .

On pose $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in S, \lambda \text{ fini}} \sigma(A_i, \lambda \in S \setminus \lambda)$ (tribus triviales)

Alors $\forall A \in \mathcal{T}, P(A) \in \{0, 1\}$.

Application 22: Soient (X_n) une suite de v.a. indépendantes (q. sup. $\mathbb{E}[X_n] = 0$) dans la S.E. absolue $\mathbb{L}^2(X_n, \mathbb{Z})$ ou un rayon de convergence presque sûrement déterministe.

2) Lemme de Borel-Cantelli et Loi des grands nombres

Lemme 23: Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements.

Alors 1) Si $\sum P(A_n) < +\infty, P(\limsup A_n) = 0$

2) Si $\sum P(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants, $P(\limsup A_n) = 1$.
Exemple 24: Si une série type absolument convergente sur les branches d'une machine à café, il écoule presque sûrement la Bible.

Proposition 25: (Loi faible des grands nombres) Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2.

Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.S.} \mathbb{E}[X_1]$.

Théorème 26: (Loi forte des grands nombres) ADTIS.

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi intégrable.

Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.S.} \mathbb{E}[X_1]$.

3) Théorème central limite

Lemme 27 (Levy): Soient (X_n) une suite de v.a. et X une v.a. Alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} X$ ssi $\phi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif}} \phi_X$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 28: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2.

Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où $\mu = \mathbb{E}[X_0]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_0)$.

Application 29: (Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ~~de la loi de Stirling~~

Application 30: Les états des marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}$ sont récurrents si $d \leq 2$.

Théorème 31: Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendants et indépendamment distribués.

On suppose $\mathbb{E}[\|X_1\|^2] < +\infty$.

On note m l'espérance et Σ la matrice de covariance.

Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

IV) Applications aux statistiques

Proposition 32: (Estimation par la méthode des moments)

On suppose donné un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi P_0 et une fonction ϕ telle que $\phi(X_1) \in L^1(P_0), \forall P_0 \in \mathcal{P}$.

Pour estimer la quantité $g(P) = \mathbb{E}_P(\phi(X_1))$,

on s'appuie sur la convergence p.s. $\bar{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.S.} g(P)$ qui lui donne fortement convergent.

Théorème 3.3. (Cochran) On considère un vecteur gaussien $X \sim N(m, \Sigma)$ et une décomposition $\Sigma = \sum_{i=1}^p E_i E_i^T$ où les E_i sont des matrices respectives

$d_1, \dots, d_p$, et les projections orthogonales $\Pi E_1, \dots, \Pi E_p$ et X sont des vecteurs gaussiens indépendants.

De plus, pour $j \in \{1, \dots, p\}$, $\Pi E_j X \sim \mathcal{N}^2(d_j, \Pi E_j \Sigma E_j^T \Pi^T)$

Corollaire 3.4. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{R}^d$

On note $V_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $N_i(n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j = i}$

et $\Pi_i = P(X_i = i)$.

$$\text{Alors } D_n(\Pi) = \sum_{i=1}^d \frac{N_i(n) - m \Pi_i}{n \Pi_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi^2(m - 1).$$

Lemme 27.1 1) Soient X et Y deux v.a. indépendants à

valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors $V \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$.

2) Soient X et Y deux v.a. indépendants, X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y

dans $\mathbb{R}^p$. Alors la valeur V a indépendants, X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y

caractérise la fonction: $\phi_{(X,Y)}(s,t) \mapsto \phi_X(s) \phi_Y(t)$.

Lemme 28.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs

dans E et soit $i \in E$. $N_i = \{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$

$$T_i^0 = \inf\{k > 0 : X_k = i\} \text{ et } T_i^{-1} = \inf\{k > 0 : X_k = i\}$$

$i \in E$ et notons $\pi_i \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$

pour les probas conditionnelles.

Définition 1. Soit $P \in \mathcal{P}(E)$ ou appelle probabilité conditionnelle sachant B la probabilité P_B sur $\mathcal{F}$ définie

$$\text{par } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque 2. Intuitivement deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'a pas d'impact sur la réalisation de l'autre, i.e. $P(A|B) = P(A)$.