Leçon N° 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X est une variable aléatoire (notée v.a.) sur cet espace.

I) Présentations.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition 1 : On dit qu'une loi μ est discrète lorsqu'il existe un ensemble D au plus dénombrable inclus dans $\mathbb{R}$ tel que $\mu(D) = 1$.

Définition 2 : On dit qu'une v.a. X est discrète lorsque sa loi $\mathbb{P}_X$ est discrète.

Proposition 3 : Si X est une v.a. discrète. En posant $\forall i \in D, p_i = \mathbb{P}(X=i)$ on a $\sum_{i \in D} p_i = 1$.

Proposition 4 : Si X est une v.a. discrète et D dénombrable tel que $X(\Omega) \subset D$.
Alors 1) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{i \in D \cap A} p_i$

i) $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} p_i \delta_i$

3) $\mathbb{P}_X$ admet comme densité par rapport à la mesure de comptage sur D la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} p_x \text{ si } x \in D \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Corollaire 5 : Soient D un ensemble au plus dénombrable et $(p_i)_{i \in D}$ une famille de réels positifs tq $\sum_{i \in D} p_i = 1$.
Alors on peut construire un espace probabilisé et une v.a. X sur cet espace tq $\forall i \in D$, $p_i = \mathbb{P}(X=i)$.

Proposition 6 : La loi image μ_f d'une loi discrète μ par une application f est une loi discrète.

Proposition 7 : Soient X et Y deux v.a. discrètes définies sur le même espace, elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$.

2) Les lois usuelles

Définition 8 : Soit $E \subset \Omega$ un ensemble fini. On appelle loi uniforme sur E la loi définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $\mathbb{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, $A \longmapsto \frac{|A \cap E|}{|E|}$

Exemple 9 : La variable aléatoire X représentant le résultat du lancer d'un dé non truqué suit la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

Définition 9 : Soit $p \in]0,1[$. On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$

Remarque 10 : $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$. ($A$ est le succès).

Exemple 11 : L'événement piocher une paire dans un jeu de 52 cartes suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{52 \times 3 \times 13}{52^2}$

Définition-proposition 12 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On appelle loi binomiale de paramètre n et p notée $\mathcal{B}(n,p)$ la loi de la somme de n v.a. de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
On a alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 13 : On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Le nombre X de "pile" obtenus suit une $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Définition-proposition 13 : Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On note $X := \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } X_n = 1\}$.
Alors X suit une loi géométrique de paramètre p et on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

Exemple 14 : Si on lance une infinité de fois une pièce de monnaie de manière indépendantes, la loi du premier pile suit une $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

Définition 14 : On dit qu'une v.a. X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Définition 15 : La loi hypergéométrique de paramètre (N, n, k) où $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![0,N]\!]$ et $k \in [\![0,N]\!]$ est la loi image de la loi uniforme

on $B(N,\ell)$ par $X : B(N,\ell) \longrightarrow \mathbb{N}$, $\omega \longmapsto |[\![1,n]\!] \cap \omega|$

i.e. $\forall i \in [\![0, \min(n,\ell)]\!]$, $P(X=i) = \dfrac{\binom{i}{n}\binom{N-n}{\ell-i}}{\binom{N}{\ell}}$

Exemple 16 : Soit une population de N individus composée de deux types distincts. On tire au hasard ℓ individus dans cette population. On compte ensuite le nombre d'individus possédant un certain type. S'il y a n individus de ce type, la v.a. $X \hookrightarrow H(N,n,\ell)$.

3) Moments.

Définition 17 : Soit X une v.a. discrète réelle. On dit que X est intégrable lorsque $\sum_{k \in E} |x_k| P(X=x_k) < +\infty$. On a alors $E[X] = \sum_{k \in E} x_k P(X=x_k)$.

Théorème 18 : (Transfert) Soit X une v.a. discrète et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $E[f(X)]$ est définie si $\sum_{k \in E} |f(x_k)| P(X=x_k) < +\infty$ et vaut $\sum_{k \in E} f(x_k) P(X=x_k)$.

Définition 19 : Si X a un moment d'ordre 2, i.e. $E[X^2] < +\infty$, on définit la variance de X par $V(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$

Exemple 20 : Soient n, p 1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $E[X] = p$ et $V(X) = p(1-p)$

2) Si $X \hookrightarrow B(n,p)$, $E[X] = np$ et $V(X) = np(1-p)$

3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $E[X] = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $E[X] = V[X] = \lambda$.

5) Si $X \hookrightarrow H(N,n,\ell)$, $E[X] = \frac{\ell n}{N}$ et $V[X] = \frac{\ell n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{N-1}{N}$.

II) Cas des v.a. entières

1) Convergence en loi

Rappel 21 : Dans le cas général, X_n converge en loi vers X lorsque pour toutes fonctions continues bornées, $E[f(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} E[f(X)]$.

Proposition 22 : Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. définies sur des espaces probabilisés à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(X=k)$.

Application 23 : Pour $j \geq 1$, soit $X_j \sim H(N_j, n_j, \ell)$.

On suppose que $N_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$ et $\frac{n_j}{N_j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} p$.

Alors $X_j \xrightarrow[j \to +\infty]{\mathcal{L}} B(\ell, p)$.

2) Fonctions génératrices

Définition 24 : On appelle fonction génératrice d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction $z \longmapsto G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) z^k$.

Proposition 25 : 1) La série entière définissant la fonction génératrice a un rayon de convergence ≥ 1.

2) La fonction génératrice caractérise la loi. Dem 1.

3) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\forall z \in]-1,1[$, $G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z)$.

Proposition 26 : Soit X une v.a. entière.

X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ ssi G_X est r fois dérivable en 1 et dans ce cas $E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = G_X^{(r)}(1^-)$.

Proposition 27 : Soient $X_n \hookrightarrow B(n, p_n)$ et $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda > 0$.

alors $G_{X_n}(z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G_X(z)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exemple 28 : Soit $z \in]-1,1[$.

1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $G_X(z) = (1-p) + pz$

2) Si $X \hookrightarrow B(n,p)$, $G_X(z) = ((1-p)+pz)^n$

3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $G_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

III) Chaînes de Markov.

Dans toute cette partie E est un ensemble au plus dénombrable muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$

1) La propriété de Markov.

Définition 29 : On dit que une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{P}(E))$ est une chaîne de Markov lorsque $\forall (i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$ tq $P(\bigcap_{j=0}^{n-1} X_j = i_j) > 0$, $P(X_n = i_n \mid \bigcap_{j=0}^{n-1} X_j = i_j) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$

Définition 30 : On dit qu'une chaîne de Markov (X_n) est homogène lorsque $\forall (i,j) \in E^2$, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ est indépendant de n.
On note alors $\forall (i,j) \in E^2$, $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.
$P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$ est la matrice de transition de la chaîne.

Proposition 31 : La matrice de transition d'une chaîne de Markov est stochastique c.à.d. $\forall i,j \in E$, $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1$ $\forall i \in E$.

Exemple 32 : La matrice de transition de la chaîne de Markov en annexe est $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Proposition 33 : Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène, de matrice de transition $(p_{ij})_{i,j\in E}$ et de loi initiale μ_0.
Alors $\forall n \geq 1$, $\forall i_0, \dots, i_n \in E$, $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mu_0(i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$

Théorème 34 : Soient (X_n) une chaîne de Markov et $i_0, \dots, i_q \in E$.
$\mathcal{L}(\theta^q(X) \mid \bigcap_{j=0}^{q} (X_j = i_j)) = \mathcal{L}(X \mid X_0 = i_q)$ où $\theta^q : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+q})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 35 : Soient $X = (X_n)$ une chaîne de Markov et T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n))$.
Sur l'événement $(X_T = i) \cap (T < +\infty)$, $\mathcal{L}(\theta^T(X) \mid \mathcal{F}_T) = \mathcal{L}(X \mid X_0 = i)$.

2) Mesures invariantes

Définition 36 : On dit que μ probabilité sur E est une mesure asymptotique de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe μ_0 sur E telle que si μ_0 est la loi de X_0, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

Définition 37 : On dit que μ mesure positive sur E est une mesure invariante de la chaîne lorsque ${}^t P \mu = \mu$.

Proposition 38 : Soit μ une probabilité sur E. LASSE.
1) μ est une mesure asymptotique de la chaîne.
2) μ est une mesure invariante de la chaîne
3) $\mathcal{L}(X_0) = \mu \Rightarrow \mathcal{L}(X_n) = \mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Théorème 39 : Toute chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini admet au moins une mesure invariante.

3) Récurrence et transience

Notation 40 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, et soit $i \in E$.
$N_i = \#\{n \geq 0,\ X_n = i\}$
$\tau_i^{(1)} = \inf\{k > \tau_i^{(k-1)} \mid X_k = i\}$ et $\tau_i = \{\inf n > 0,\ X_n = i\}$.

Définition 41 : $i \in E$ est récurrent pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $P_i(\tau_i < +\infty) = 1$. Il est transient dans le cas contraire.

Lemme 42 : $i \in E$ est récurrent ssi $E[N_i] = +\infty$.

Application 43 : Les états de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^k$ sont récurrents pour $k \leq 2$, dès 2