

Leçon N° 262 : Convergence d'une suite de variables aléatoires - Théorèmes limites - Exemples et applications

1) Convergence d'une suite de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ ou dans $\mathbb{R}$. $\|\cdot\|$ désigne une norme sur ces espaces.

1) Convergence en probabilité

Définition 1: Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge en probabilité vers une v.a. X lorsque $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On note $X_n \xrightarrow{P} X$ (p.s.).

Proposition 2: Il y a unicité de la limite pour la convergence en probabilité.

Proposition 3: Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^e$, si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge en probabilité vers X , alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

2) Convergence L^p

Définition 4: Soit $p \geq 1$. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. admettant un moment d'ordre p converge dans L^p vers X une v.a. lorsque $X \in L^p$ et $E[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On note alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Proposition 5: Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ et $X_n \xrightarrow{P} Y$, alors $X = Y$ p.s.

Exemple 6: Si $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$, $\forall p \geq 1$, $X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Proposition 7: Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. Soit $p \geq 1$.

Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Contre exemple 8: (la réciproque est fautive). Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n := n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$

$X_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais pas dans L^p $\forall p \geq 1$.

Proposition 9: Si $q > p \geq 1$, soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. telles

que $X_n \xrightarrow{L^q} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Contre exemple 10: (la réciproque est fautive). Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \sqrt{n} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$,

$X_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^2} 0$.

Définition 11: Une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ est

équi-intégrable lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \int (X_i)_+^n = 0$,

i.e. lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| > n}] = 0$.

Proposition 12: Une famille de v.a. $(X_i)_{i \in I}$ est équi-intégrablessi

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists y > 0, \forall A \in \mathcal{F}, (P(A) \leq y) \Rightarrow \forall i \in I, E[|X_i| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$

(équi-continuité),

ou 2) $\sup_{i \in I} E[|X_i|] < +\infty$

Théorème 13: Soient $P \geq 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^P)^{\mathbb{N}}$ et $X \in L^P$.

Il y a équivalence entre :

(i) $(X_n)_+^P \xrightarrow{P} X_+^P$

(ii) $(X_n)_+^P$ est équi-intégrable et $X_n \xrightarrow{P} X$

3) Convergence presque sûre

Définition 14: Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge presque sûrement vers une v.a. X lorsqu'il $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $P(C) = 1$ tq $\forall \omega \in C, X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)$.

On note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Proposition 15: Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{L^p} Y$ alors $X = Y$.

Lemme 16: (Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, alors $P(\limsup A_n) = 0$

2) Si les A_n sont indépendants et si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, alors $P(\limsup A_n) = 1$.

Proposition 17: Si X est une v.a. telle que $\forall \varepsilon > 0$,

$\sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$. Alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Proposition 18: Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Contre exemple 19: (la réciproque est fautive) : $X_0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $X_1 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}$, $X_2 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{8}]}$, $X_4 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{16}]}$, ... $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$.

Exemple 20: Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$, $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ (la v.a. telle que $X_n \xrightarrow{L^1} 0$)

Proposition 21: Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, il existe

une sous suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers X .

Théorème 2.2: (convergence dominée) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles telle que $X_n \xrightarrow{P} X$ et tel $\exists Y \in L^1$ tel $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq |Y|$ p.s.
Alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$

II) Convergence en loi:

Dans cette partie: soient $\forall n \in \mathbb{N}$ une v.a. X_n définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit X une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1) Définitions et propriétés.

Définition 2.3: La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X lorsque $\forall$ fonction continue bornée, $E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$

Où note $X_n \xrightarrow{L} X$

Proposition 2.4: Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, si $X_n \xrightarrow{L} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{L} g(X)$.

Proposition 2.5: Soient X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a. à valeurs dans Δ ensemble dénombrable. Si $\forall k \in \Delta, P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X = k)$

Alors $X_n \xrightarrow{L} X$

Application 2.6: Si $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in B(n, p_n)$ où $n p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$, alors $X_n \xrightarrow{L} X$ où $X \in P(\lambda)$.

Proposition 2.6: Soit (X_n) une suite de v.a. réelles de fonctions de répartition F_n , alors $X_n \xrightarrow{L} X$ si $F_n \xrightarrow{\text{cor}} F$ en toute point de $\mathbb{R}^d$ de F .

Théorème 2.7 (Portmanteau). Soient (X_n) et X tel il y a équivalence entre

- i) $X_n \xrightarrow{L} X$
 - ii) $\forall$ fermés $F, P(F) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P^n(F)$
 - iii) $\forall$ ouvert $O, P(O) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P^n(O)$
 - iv) $\forall$ bornés A tel ∂A vérifie $P(\partial A) = 0, P^n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$.
- Théorème 2.9: (Levy) $X_n \xrightarrow{L} X$ si $\phi_{X_n} \xrightarrow{\text{cor}} \phi_X$ sur $\mathbb{R}$.

1) Lien avec la convergence

Proposition 3.0: Si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors $X_n \xrightarrow{L} X$.

Contre exemple 3.1: (la réciproque est fautive). Si $X_n \in B(p)$ avec $p \in]0, 1[$ donc X_n deux indépendantes, alors $X_n \xrightarrow{L} X \sim B(p)$ mais $X_n \not\xrightarrow{P} X$.

Proposition 3.2: Si (X_n) converge en loi alors une constante a , alors $X_n \xrightarrow{P} a$.

Lemme 3.3 (Slutsky): Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si $X_n \xrightarrow{L} X$ et $Y_n \xrightarrow{L} C$ constante, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{L} (X, C)$.

III) Théorèmes limites.

1) Loi 0-1 de Kolmogorov.

Théorème 3.4: Soient S un ensemble infini et $(P_i)_{i \in S}$ une famille de lois indépendantes sur la loi P .

Où pour $Z = \bigcap_{A \in S, A \text{ fini}} (A^c \in S \setminus A)$ (union qu'une)

Alors $\forall A \in Z, P(A) \in \{0, 1\}$.

Application 3.5: Soient (X_n) une suite de v.a. indépendantes tel $\sup E[X_n] < +\infty$. Alors la S.E. aléatoire $Z X_n$ a un rayon de convergence presque sûrement déterminé.

2) Lois des grands nombres.

Proposition 3.6: (Loi faible des grands nombres)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de même loi, admettant un moment d'ordre 2 indépendantes. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} E[X_0]$.

Théorème 3.7: (Loi forte des grands nombres)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de même loi, admettant un moment d'ordre 4 indépendantes. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} E[X_0]$.

AD7E S.

very

3) Théorème central limite

Théorème 38: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2.

Alors
$$\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ où } \mu = E[X_0] \text{ et } \sigma^2 = V(X_0).$$

Application 39 (Stirling): $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Application 40: Les écart des marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}^d$ sont récurrents $\forall d \leq 2$.

IV) Un peu de statistique

Proposition 41: Estimation par la méthode des moments.

On suppose donné un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi P_0 et une fonction ϕ telle que $\phi(X_1) \in L^1(P_0) \forall P_0 \in \mathcal{P}$.

Pour estimer la quantité $g(P) = E_0(\phi(X_1))$

On s'appuie sur la convergence $\hat{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(P)$

$\hat{g}_n$ est donc fondamentalement constant.

Théorème 42 (Cochran) On considère un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ et une décomposition $E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives $d_1, \dots, d_r$. Les projections orthogonales $\Pi_{E_1} X, \dots, \Pi_{E_r} X$ forment des vecteurs gaussiens indépendants.

De plus, pour $j \in \{1, \dots, r\}$, $\|\Pi_{E_j} X\|_2^2 \sim \chi^2(d_j, \|\Pi_{E_j} X\|_2^2)$

Théorème 41.1: Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendants et indépendamment distribués.

On suppose $E[\|X_n\|^2] < +\infty$. On note m l'espérance de C

La matrice de covariance. Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, C)$

Corollaire 43: Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des v.a.i.i.d à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$. On note $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $N_i(n) = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j = i\}}$.

Alors $\Pi_i = P(X_1 = i)$

Alors $D_n(\Pi) = \frac{\sum_{i=1}^m (N_i(n) - n\Pi_i)^2}{n\Pi_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi^2(m-1)$

de 42.