

Leçon N° 264

Loi d'une variable aléatoire : caractérisation, exemples, applications.

Soit (X, F, P) un espace probabilisé, toutes les variables aléatoires (resp. valeurs) seront définies sur cet espace et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (resp. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) avec $\omega \in \Omega$.

I) Les fondations

1) Premières définitions et propriétés

Définition 1: On appelle variable aléatoire toute application de (Ω, F) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit de même les valeurs aléatoires en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^d$. On note v.a. pour variable aléatoire.

Définition 2: On appelle loi d'une variable aléatoire X la mesure image de P par X . Cette loi est notée P_X . Cette loi image est une mesure de probabilité définie par : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_X(A) = P(X \in A)$.

Notation 3: Lorsqu' X est une v.a. de même loi que Y , on note $X \stackrel{L}{=} Y$.

Définition 4: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction de répartition de X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = P(X \leq t)$.

Théorème 5: Les fonctions de répartition caractérisent les lois.

Proposition 6: La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire vérifie les propriétés suivantes : - F_X est à valeurs dans $[0, 1]$.

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$
- F_X est continue à droite, limite à gauche
- L'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable.

2) Exemples de loi discrètes

Définition 7: On dit qu'une loi P est discrète lorsqu'il existe un ensemble D fini ou dénombrable inclus dans $\mathbb{R}^d$ tel que $P(D) = 1$. On dit qu'une v.a. est discrète si sa loi P_X l'est.

Exemples 8: (cf annexe 1). 1) On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi $p = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ où δ_x la mesure de Dirac en x . 2) Soit $X \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On appelle loi binomiale de paramètres (n, p) la loi de la somme de n v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Sa loi est $p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.

3) On dit qu'une v.a. X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

4) On dit qu'une v.a. X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

3) Exemples de loi à densité

Définition 9: On dit qu'une loi P est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue lorsqu'il existe une fonction mesurable f qui soit une densité de P par rapport à la mesure de Lebesgue. On a alors $\forall$ borélien A , $P(A) = \int_A f(x) dx$.

Exemple 10: On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ lorsqu'elle admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{b-a} 1_{[a, b]}(x)$. 1) Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, on dit qu'une v.a. X suit la loi $N(m, \sigma^2)$ lorsqu'elle admet la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$.

II) Caractérisations

1) Moments et théorème de transfert

Définition 11: Soit X est une variable aléatoire réelle intégrable, on appelle espérance de X le réel défini par $E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$. **Théorème 12:** (théorème de transfert) X suit la loi P si $\forall \phi : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurable, $E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dP_X(x)$.

Corollaire 13: Si ϕ fonction ϕ continue bornée positive,

$E[\phi(X)] = \int \phi(x) dP(x)$, alors $X \sim P$

Application 14: Si X et Y sont indépendants et ont pour densité f_X et f_Y , alors $X+Y$ admet une densité qui est $f_X \otimes f_Y$.

Définition 15: La variance de X vaut $V(X) = E[X - E[X]]^2$ ou encore $E[X^2] - (E[X])^2$.

Définition 16: Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés, on définit son inverse généralisée $F^{-1}: x \in [0, 1] \mapsto \inf \{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq x\}$.

Proposition 17: Soit $U \sim U([0, 1])$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés, alors $X = F^{-1}(U)$ est une v.a. de fonction de répartition F .

2) Fonctions caractéristiques.

Définition 18: On appelle fonction caractéristique d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ la fonction complexe définie $\forall t \in (\mathbb{R}^d)^*$, $\phi(t) = \int \exp(i \langle t, x \rangle) d\mu(x)$.

Théorème 19: La fonction caractéristique, caractérise la loi.

Proposition 20: Soient X et Y deux v.a. indépendantes sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d, \langle X, \alpha \rangle \stackrel{L}{\sim} \langle Y, \alpha \rangle$. Alors $X \stackrel{L}{=} Y$.

Proposition 21: Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On a les propriétés suivantes: 1) $\phi(0) = 1$,

2) $|\phi(t)| \leq 1$

3) ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 22: 1) La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\phi_N: t \mapsto e^{i \langle m, t \rangle - \frac{\sigma^2}{2} \|t\|^2}$.

2) La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est $\phi_C: t \mapsto e^{i \langle a, t \rangle - b |t|}$.

Proposition 23: Soient X et Y deux v.a. indépendantes intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors $\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$.

Exemple 24: (Valeurs bornées): $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une v.a. bornée lorsque la densité est bornée. Soit on note sa densité et Σ sa matrice de covariance: $\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_X(t) = \exp(i \langle t, \mu \rangle - \frac{1}{2} \langle t, \Sigma t \rangle)$.

Application 25: $\forall i, j \in [1, d], i \neq j, (X_i, X_j) \in \mathcal{C}(0, \Sigma_{ij})$.

3) Convergence en loi.

X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 26: On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X: t \in [-1, 1] \mapsto E[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \phi_X(n) e^{i \langle n, t \rangle}$.

Proposition 27: La série entière permettant de définir la fonction génératrice a un rayon de convergence ≥ 1 .

2) La fonction génératrice caractérise la loi.

3) Si X et Y sont indépendants et à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Proposition 28: X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si G_X est r -fois dérivable en 1 et dans ce cas $G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$.

Exemple 29: 1) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = ((1-p) + pe^t)^n$.

2) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$.

III) Convergence en loi.

1) Définition et exemples.

Définition 30: Soit (X_n) une suite de v.a. et X une v.a.

On dit que (X_n) converge en loi vers X lorsque la fonction f continue bornée, $E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$.

Lemme 23: Soit g une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^d$. Si

(X_n) converge en loi vers X , alors (Y_n) la suite définie par $Y_n = g(X_n)$ converge en loi vers $g(X)$.

théorème 30: (Portmanteau) Les propositions suivantes sont équivalentes

- 1) μ_n converge faiblement vers μ
- 2) $\forall f$ uniformément $\mathcal{C}^0$ bornée sur $\mathbb{R}^d$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu_n f d\mu = \int \mu f d\mu$.
- 3) $\forall$ fermé F , $\mu(F) \geq \limsup \mu_n(F)$
- 4) $\forall$ ouvert O , $\mu(O) \leq \liminf \mu_n(O)$
- 5) $\forall$ fonction A sur la frontière ∂A vérifiant $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$

Corollaire 31: (X_n) converge en loi vers X si et seulement si F_n est $\mathcal{C}^0$, $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$.

théorème 32: (Lévy), $X_n \xrightarrow{d} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X$.

théorème 33: Soit X_n et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X_n \xrightarrow{d} X$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \geq 0$.

Application 34: Soit (p_n) une suite dans $]0, 1[$ telle que $p_n \rightarrow p$. Soit $(X_n) \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, alors $X_n \xrightarrow{d} X$ où $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2) Théorème central limite

théorème 35 (dimension 1): Soit (X_n) une suite de v.a. réelle indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2.

d'espérance m et de variance σ^2 .

Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Application 36: (Stirling): $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Application 37: Soit $Z \in \mathbb{N}$. Soit Z_k des variables aléatoires sur $\mathbb{Z}^2$.

sont récurrents sur $\mathbb{Z}^2$.

théorème 38 (en dimension 1): Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendantes et identiquement distribuées.

On suppose que $E[\|X_1\|^2] < +\infty$. On note m l'espérance et C la matrice de covariance. Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, C)$.

Définition 39: Soit X un vecteur donné de $\mathbb{R}^d$ tel que $E[X] = 0$ et $\text{Cov}(X) = I_d$. Soit h de $\|h\|_2^2$ est appelée la h -norme et h est appelé se libère note $\chi^2(d)$.

Parce que pour des vecteurs

202

monque
Th
de Zeng