

# Leçon N° 253 : Utilisation de la notion de convexeité en analyse.

Dans toute cette leçon,  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}^n$ -e de dimension finie  $n \leq +\infty$ .

## I) Définitions et propriétés de convexeité.

### 1) Ensembles convexes.

Définition 1: Soit  $C$  une partie de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $C$  est convexe lorsque  $\forall (a,b) \in C^2, [a,b] \subset C$ , i.e.  $\forall \lambda \in [0,1], (a + (1-\lambda)b) \in C$ .

Exemples 2: Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont convexes.

1) Les  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{C}$  sont convexes.

3) Les boules de  $\mathbb{C}$  sont convexes, quelle que soit la norme sur  $\mathbb{C}$ .

Proposition 3: Une partie convexe est convexe par moy, donc convexe.

Proposition 4: Une intersection de convexes est convexe.

Proposition 5: Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{C}$ , il existe une plus petite partie convexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $A$ , notée  $\text{Conv}(A)$  et appelée enveloppe convexe de  $A$ . (cf remarque 2)

C'est l'intersection de toutes les parties convexes de  $\mathbb{C}$  contenant  $A$ .  
Proposition 6:  $\text{Conv}(A) = \bigcap_{i=1}^n \{x_i\}_{i=1}^n \subset A, (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1$

Théorème 7: (Carathéodory). Tout point de  $\text{Conv}(A)$  s'écrit comme combinaison de coefficients positifs d'un plus petit nombre de points de  $A$ .

Corollaire 8: En dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est toujours compact.

Définition 9: Les points extrémaux d'un ensemble sont ses points ne pouvant pas s'écrire comme combinaison de deux points différents de cet ensemble.

Théorème 10: Tout convexe compact de  $\mathbb{C}$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

### 2) Fonctions convexes.

Soit  $C$  une partie convexe de  $\mathbb{C}$ .

Définition 11: Soit  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est convexe lorsque  $\forall (a,b) \in C, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$ .  
 On dit que  $f$  est strictement convexe lorsque  $\forall a \neq b \in C, \forall \lambda \in ]0,1[, f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$ .

Définition 12: On dit que  $f$  est convexe lorsque  $-f$  est concave.

Exemples 13: 1) Les fonctions affines sont convexes et concaves.

2) Les normes sont convexes.

3) Exp est convexe, ln est concave.

4)  $\ln x^2$  est convexe,  $\ln|x|$  est concave.

Proposition 14: Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Il y a équivalence entre:

- 1)  $f$  est convexe.
- 2) Son graphe est au dessus de ses cordes (cf remarque 2)
- 3) Son épigraphe  $E_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$  est convexe.
- 4) Elle est l'enveloppe supérieure de l'ensemble des fonctions affines qu'elle majore.

5)  $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto f((1-t)a + tb)$  est convexe  $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$  de norme 1,  $t \in [0,1]$  et tel que  $\forall t \in ]0,1[, a + t(b-a) \in U$ .

Si  $f$  plus on suppose que  $f$  est différentiable sur  $U$ , on a:

- 6) Le graphe de  $f$  est au dessus de ses tangentes:  $\forall (x,y) \in U^2, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$
- 7)  $\forall f: U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   
 $\forall (x,y) \in U^2, \langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$ .

Si enfin on suppose  $f$  deux fois différentiable, on a:

$\forall (x,y) \in U^2, \langle H_f(x), y-x \rangle \geq 0$ .

## II) Séparation des convexes et applications

Définition 15: Soit  $L$  une forme linéaire sur  $E$  non nulle et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $H := \{x \in E, f(x) = \alpha\}$  est un hyperplan.

Théorème 16 (Hahn-Banach géométrique) : Si  $C$  est une partie convexe de  $E$ , fermée et non vide et si  $x \notin C$ ,  $\exists f \in E'$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall y \in C, f(y) < \alpha < f(x)$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux convexes non vides disjointes avec  $A$  fermé et  $B$  compact,  $\exists$  un hyperplan qui sépare strictement  $A$  et  $B$ , i.e.  $\exists f \in E', \sup_{x \in A} f(x) < \inf_{y \in B} f(y)$ . (cf Annexe 4)

Corollaire 17: Si  $F$  est un sous-espace linéaire non trivial de  $E$  tout entier,  $\exists f \in E'$  non nulle sur  $F$  telle que  $f(x) = 0 \forall x \in F^\perp$ .

Théorème 18: L'enveloppe convexe de  $O_n(\mathbb{R})$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$  pour la norme 2.

## III) Inégalité de Jensen

### 1) Avec les réels

Lemme 19: Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe alors, (cf Annexe 5)  
 $\forall (a < b < c) \in I, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$

Corollaire 20: Si  $f$  est convexe sur  $C = ]a, b[$ , continue sur  $C$ .

Proposition 21: (Inégalité de Jensen) : Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ ,

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Proposition 22: (Inégalité arithmético-géométrique)

$$\text{Si } x_1, \dots, x_n \in (\mathbb{R}_+^*)$$

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Proposition 23: (Inégalité de Young) :  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)$   
 $\forall p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

### 2) Dans les espaces $L^p$

Proposition 24: (Inégalité de Hölder) : Soit  $f, g, X \rightarrow \mathbb{R}$  positifs et  $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $0 \leq \int X f g \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$ .

Remarque 25: Si  $p = q = 2$ , on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 26: (Inégalité de Poincaré) : Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $f(0) = 0$ ,  $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$ .

Corollaire 27:  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé.

Théorème 28:  $\forall p \in [1, +\infty[$ ,  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  est un Banach.

Théorème 29 (Hahn-Banach) : Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire.

On note  $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $\Gamma$  d'Euler  
 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-tx} dt$   
 $f = \Gamma$  si  $f$  vérifie  $\begin{cases} a) f'(x) = -x f(x) \\ b) f(1) = 1 \end{cases} \forall x \in (\mathbb{R}_+^*)$

### 3) En probabilité

Proposition 30: (Jensen) : Soit  $X$  une variable aléatoire intégrable à valeurs dans  $I$  convexe,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe alors  $f(E[X]) \leq E[f(X)] \leq +\infty$ .

Corollaire 31:  $E[X]^2 \leq E[X^2]$ . En particulier, la variance  $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$  est positive.

## IV) Convexité et optimisation

### 1) Endgame

de 1

Définition 32:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe lorsque

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Théorème 33: Si  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, l'ent minimum local est global.

1) Si  $C$  est un convexe non vide,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe,  $\exists$  au plus un minimum de  $f$  sur  $C$ .

Proposition 34: Si  $f$  est convexe et strictement convexe, alors  $f$  admet un unique minimum sur  $\mathbb{R}^n$ .

Contre exemple 35: 1)  $f$  n'est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^n$  mais n'a pas de minimum global.

2) Une fonction constante est convexe mais n'est pas un ensemble de définition comme minimum global.

Proposition 36: Si  $f$  est convexe sur  $C$  convexe compact, alors  $f$  atteint son maximum sur les points extrémaux de  $C$ .

Proposition 37: Si  $C$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $f$  est différentiable en  $x_0$ , alors, si  $Df_{x_0} = 0$ ,  $x_0$  est un minimum global de  $f$ .

2) Dans les espaces de Hilbert: projection.

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de dimension possiblement infinie et  $\|\cdot\|$  sa norme associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Lemme 38: (Péjle du parallélogramme)  $\forall (x, y) \in H^2$ ,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Théorème 39: (projection sur un convexe fermé) Soit  $C$  un convexe fermé non vide de  $H$  (défini de même qu'en 1).

Alors  $\forall x \in H, \exists ! y \in C, \|x-y\| = \inf_{z \in C} \|x-z\|$   
 $\hat{y} = P_C(x, C).$

On note cet élément  $P_C(x)$ .

Il est caractérisé par  $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle P_C(x), x - P_C(x) - z \rangle) \leq 0$

Corollaire 40: Soit  $F$  un sous fermé de  $H$ ,  $H = F \oplus F^\perp$

Théorème 41 (Riesz):  $\forall \phi \in H'$  continue,  $\exists ! y \in H$  tel que  $\forall x \in H, \phi(x) = \langle x, y \rangle$

Corollaire 42: Si  $F$  est un sous de  $H$ , on a

$$F \text{ est dense dans } H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$$