Leçon N° 250 : Transformation de Fourier. Applications

I) Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par :
$\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi \xi x}\, dx$.

Exemple 2 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$.
Alors $\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi}\, e^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple 3 : Pour $H : x \longmapsto e^{-|x|}$, $\hat{H} : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{1}{1+x^2}$.

Proposition 4 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$,
1) $\widehat{f(\cdot - a)}(\xi) = e^{-2i\pi a \xi}\, \hat{f}(\xi)$ et $\widehat{f}(\xi - a) = \widehat{e^{2i\pi a \cdot} f}(\xi)$.
2) $\widehat{f(\lambda \cdot)}(\xi) = \dfrac{1}{|\lambda|}\, \hat{f}\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right)$

Lemme 5 : (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 6 : $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $f \longmapsto \hat{f}$ est linéaire continue et $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proposition 7 : (Formule d'échange) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,
alors $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \hat{g}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, g(t)\, dt$.

2) Dérivation

Proposition 8 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
Supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$,
$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$.

Proposition 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$
Supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x \longmapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors
$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-2i\pi \cdot)^k \hat{f}(\xi)$

Application 10 : Soient $a > 0$ et soit $f : x \longmapsto e^{-ax^2}$.
Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}$

3) Convolution

Définition 11 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution de f et g par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$.

Définition 12 : On appelle approximation de l'unité une suite de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \geq 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\, dx = 1$
3) $\forall \delta > 0$, $\int_{|x| \geq \delta} \rho_n(x)\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Lemme 13 : Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p < +\infty$. Alors $\|f * \rho_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Définition 14 : On définit les noyaux de Gauss γ_δ pour $\delta > 0$ par $\gamma_\delta : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$

Proposition 15 : 1) $(\gamma_{\delta^{-1}})_{\delta > 0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$
2) $\forall \delta > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma}_\delta(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\, \gamma_{\delta^{-1}}(\xi)$

Théorème 16 : La transformée de Fourier est injective dans $L^1(\mathbb{R})$

Proposition 17 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$

Application 18 : Dans $L^1(\mathbb{R})$, $f * f = f$ a pour unique solution $f = 0$.

Théorème 19 : (Formule d'inversion).
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\check{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$
i.e. $f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, e^{2i\pi \xi \cdot x}\, dx$

II) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 20 : On définit l'espace de Schwartz

$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \ |x^p f^{(q)}(x)| \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0 \}$.

Exemples 21 : 1) $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

2) $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Propositions 22 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \bigcap_{1 \le p < +\infty} L^p(\mathbb{R})$.

Remarques 23 : 1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ donc la transformée de Fourier est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, multiplication par polynôme et par produit.

Théorème 24 : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Exemple 25 : $x \mapsto e^{-x^2}$ est le vecteur propre de la transformée de Fourier.

Théorème 26 : La transformée de Fourier est un bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} \ \ \hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

En particulier, son inverse est $f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2i\pi \xi x} d\xi \right)$

Notations 27 : On pose $\forall 0 < a < 1, b > 1$ tq $ab > 1$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ \varphi(x) \text{ dans } [\frac{1}{b}, b] \\ \varphi(1) = 1 \end{cases}$

On désigne de $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\hat{u} = \varphi$.

Lemme 28 : Si f est bornée et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $t \in \mathbb{R}$, alors $b^{2t} C_b(f,t) \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0$ où $C_b(f,t) := \int_{\mathbb{R}} f(s) u[b^t(s-t)] ds$.

Théorème 29 : $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \cos(2\pi b^k x)$, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable nulle part.

Application 30 : (Equation de la chaleur) Le problème $\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ admet une unique solution vérifiant

1) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

2) $u(t,x) \xrightarrow{L^1} u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) $\forall \alpha < a < b, \exists C_{a,b} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|(1+x^2) \partial^2_{xx} u(t,x)| < C_{a,b}$

De plus, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$ est solution.

III) Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 31 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 32 : (Formule de Plancherel - Parseval)

$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{g}(\xi) d\xi$.

i.e. $\langle f | \hat{g} \rangle = \langle f | g \rangle$

En particulier, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Théorème 33 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $f \mapsto \hat{f}$ admet un unique prolongement linéaire continue à $L^2(\mathbb{R})$ toujours noté $\mathcal{F}$

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \ \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et p.p. $x \in \mathbb{R}, \ \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$

Dans la suite, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)$ celle d'une fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 34 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Proposition 35 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall \xi \in \mathbb{R}$ par

$g_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx$.

Exemple 36 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sinc}(x)$

Alors p.p. $x \in \mathbb{R}, \ \mathcal{F}(f)(x) = \pi \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x)$.

IV) Applications de la transformée de Fourier.

1) Echantillonnage d'un signal et lien avec séries de Fourier

Théorème 37 : (Formule sommation de Poisson)
Soit $f \in S(\mathbb{R})$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n x}$

Théorème 38 : (Critère et formule de restitution de Shannon)
Soit $f \in S(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $F > 0$ avec $\hat{f}$ nulle en dehors de $[-F, F]$. Si $2F \leq 1$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}((n-t)\pi)$.

2) Fonctions caractéristiques.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 39 : La fonction caractéristique de X est
$\varphi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dP_X(x)$.

Proposition 40 : La fonction caractéristique caractérise la loi de X.

Proposition 41 : Si X et Y sont deux v.a indépendantes, alors
$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Lemme 42 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_{aX+b} : t \mapsto e^{ibt}\, \varphi_X(at)$.

Exemples 43 : 1) Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$,
la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\varphi_N : t \mapsto e^{imt} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

2) Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$,
la fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est
$\varphi_C : t \mapsto e^{iat} e^{-b|t|}$.

Théorème 44 : (Lévy) Soit (X_n) une suite de v.a et X_∞ v.a.
Alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X_\infty$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi_{X_\infty}(t)$

Application 45 : (théorème central limite)
Soit X_n des v.a iid dans L^2 d'espérance μ et de variance σ^2.
Alors $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0,1)$.