

Leçon N° 246 : Séries de Fourier - Exemples et applications

I) Présentations

1) Fonctions définies sur la ligne

Définition 1: On note $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient pour la relation d'équivalence sur $\mathbb{R} : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 2: $\mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) := \{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ est un cycle sur } \mathbb{R} \}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour $f \mapsto \lambda f$ et $f + g \mapsto \lambda f + \lambda g$ et $f \mapsto f^*$ est la conjugaison complexe.

On identifie naturellement ces deux espaces par la suite.

Remarque 3: si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est T -périodique, $T > 0$, alors $f(\frac{T}{2\pi} \cdot)$ est 2π -périodique.

Définition 4: Soit $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{C}^q(\mathbb{T}) := \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^q(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_m^q(\mathbb{T}) = \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_m^q(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 5: $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une algèbre à bornes pour le produit usuel et la norme $\|f\|_\infty$.

Exemple 6: Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $t \mapsto e^{int} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.

Proposition 7: si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable et localement intégrable, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{T}} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

Définition 8: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des (classes des) fonctions $\mathbb{R}$ -élevées - mesurables - 2π -périodiques qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Cet espace est complet pour la norme $\|f\|_p(\mathbb{T}) = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p}$.

Proposition 9: $\forall 1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{T}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Proposition 10: $\forall 1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$.

2) L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$

Proposition 11: $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert pour le produit

scalair $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Définition 12: Soit $N \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré N , un élément de $\mathcal{P}_N := \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{ e^{in} \mid n \leq N \}$. On note $\mathcal{P} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_N \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ l'espace des polynômes trigonométriques.

Théorème 13: (Stone Weierstrass) Soit X un espace métrique compact. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison et $\forall x \in X, \exists f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.

Corollaire 14: Pour toute norme $(\varphi(\pi), \|\cdot\|_\varphi)$

Corollaire 15: $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.

3) Coefficients de Fourier

Définition 16: Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1) On appelle n -ième coefficient de Fourier de f : $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

2) On appelle série de Fourier de f , la suite des sommes partielles symétriques $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ où $S_N(f) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in}$.

Définition 17: Pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, le produit de convolution $f \otimes g$ est, lorsqu'il existe, défini en $x \in \mathbb{T}$ par: $(f \otimes g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t) dt$.

Proposition 18: 1) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\tau_\alpha(f) = f(\cdot + \alpha) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ et $c_n(\tau_\alpha(f)) = e^{in\alpha} c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $c_n(g \otimes f) = (c_n \otimes c_n)(f, g) = c_n(f) c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, alors $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ et $c_n(f \otimes g) = c_n(f) c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

4) Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $f \otimes \delta_n = c_n(f) \delta_n$. $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, on a $c_p(f \otimes \delta_n) = c_p(f) c_p(\delta_n) = c_p(f) \delta_{p,n}$.

Lemme 19 (Riemann-Lebesgue) $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$, $\text{con}(f)(n) \in \mathbb{C}$ et $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \text{con}(f)(n) = 0$.

II) Convergence de la série de Fourier.

1) Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 20: Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\text{con}(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Corollaire 21: Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$.

$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} \text{con}(f)(n) e_n$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{H}_N$.

Théorème 22: (Parseval) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors $\|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow 0$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto \text{con}(f)(n) e_n$ est une somme trigonométrique. En particulier, $\|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{|n| \leq N} |\text{con}(f)(n)|^2$.

2) Noyau de Dirichlet et convergence ponctuelle.

Définition 23: Soit $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Dirichlet d'ordre N par $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx}$.

Proposition 24: Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 1) D_N \text{ est paire et } \int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx &= 1. \\ 2) \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \\ 3) \forall f \in L^1(\mathbb{T}), S_N(f) &= D_N * f \end{aligned}$$

Proposition 25: Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = 0$ si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0$.

Proposition 26: (Test de Dirichlet) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x , alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$.

Proposition 27: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $f = g$ sur $\mathbb{T} \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{T}$, alors $S_N(f)(x_0) = S_N(g)(x_0)$.

Théorème 28 (Dirichlet) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x , alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$. Si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.

Lemme 29: $\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \sim \log N$.

Corollaire 30: $\exists f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) \neq f(x)$.

3) Noyau de Fejér et convergence uniforme.

Définition 31: Soit $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Fejér d'ordre N par $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$.

Proposition 32: Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 1) F_N &= \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} \text{ et } \forall x \in \mathbb{T}, F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2. \\ 2) \text{con}(F_N)(n) &= 1 - \frac{|n|}{N} \text{ pour } |n| \leq N \text{ et } 0 \text{ sinon.} \\ &= \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \text{con}(f)(n) \text{ car } \forall f \in L^1(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Proposition 33: (F_N) est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{T})$.

Théorème 34: 1) Soit $f \in C(\mathbb{T})$, alors $\|S_N(f)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. 2) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\|S_N(f)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ si et seulement si f est continue.

Corollaire 35: L'application $f \mapsto S_N(f)$ est continue et injective.

Corollaire 36: Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Si f est continue, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.

4) Noyau de Poisson et convergence en sens strict.

Définition 37: Le noyau de Poisson est $P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}$ pour $0 < r < 1$. On a $\int_{\mathbb{T}} P_r(x) dx = 1$ et $P_r(x) \geq 0$.

Proposition 38: 1) $\forall r \in (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{T}$, $P_r(x) \leq \frac{1}{1-r}$. 2) $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} P_r(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{T}} f(x) dx$.

3) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\lim_{r \rightarrow 1^-} S_N(r, f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ si et seulement si f est continue.

4) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\lim_{r \rightarrow 1^-} S_N(r, f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ si et seulement si f est continue.

Théorème 3.3 (Abel - Jordan). Soit $f \in L^1_{\text{loc}}$.

1) Si f est continue, alors son série de Fourier converge vers sens d'Abel :

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = f(\theta)$$

2) Si f admet une limite à gauche et à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$$

Corollaire 4.0 (Formule d'inversion) Soit $f \in \mathcal{D}'$ si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)| < +\infty$ alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = f(\theta)$.

Théorème 4.1 : Soit $f \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}^1$, on a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = f(\theta)$.

III) Application

Intégrale de Fejér

1) Critère de Weier

Théorème 4.2 Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. On pose $X_n(a, b) = \{ \theta \in [a, b], a_n e^{in\theta} \neq 0 \}$.
 L.A.S.S.E. (i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \rightarrow 0$ b.a. $\forall \theta \in (a, b)$
 (ii) $\forall \theta \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φ^0 on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k(\theta) = \int_a^b \varphi(t) dt$
 (iii) $\forall \theta \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i k \theta} \varphi_k(\theta) = 0$.

Exemple 4.3 : Soit $\theta > 0$. $(a_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 sur $[0, 1]$.

2) Calcul de sommes

Définition 4.4 : On pose $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ et on pose $f(\theta) = 1$

$$f \mapsto \frac{z^{\frac{1}{2}-1}}{z^{\frac{1}{2}-1}}$$

alors f est $\mathcal{D}'$ sur $(0, 1)$ et $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \theta^n$. On définit alors

(b_n) comme étant les coefficients de Bernoulli.

$$\text{Proposition 4.5. } \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(q) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{(2\pi)^q}{2 \times (q-1)!} b_{2q}$$

où ζ est la fonction de Riemann.

Exemple 4.6 : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

3) Fonctions automorphes

Application 4.7 : Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction automorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors f est univalente sur Ω .

Plus précisément, $\forall \alpha \in \mathbb{H}$, $\forall R = 1(\alpha, \alpha + 2\pi i)$, alors f est $\mathcal{D}$ sur $\Omega \cap D(\alpha, R)$.

4) Equations en caractères

Application 4.8 : On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{H})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Alors $\exists ! u \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}^2(\mathbb{H})$ telle que

$$\begin{cases} \Delta u - 2^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{H} \\ u(z, 1) = u(z, 0) = 0 & \forall z \in \mathbb{H} \\ u(z, 0) = f(z) & \forall z \in \mathbb{H} \end{cases}$$

On définit $V(u, 1) \in \mathbb{H}$ par $u(z, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} z) \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} z)$ avec $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin(\frac{n\pi}{L} z) dz$.

5) Lien avec la transformée de Fourier

Définition 4.9 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier par

$$\hat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi \eta x} f(x) dx, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

Théorème 5.0 (Formule de Poisson) Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On suppose

qu'il y a $\exists T > 0, \alpha > 1, \forall \eta \in \mathbb{R}, |f(\eta)| \leq T(1+|\eta|)^{-\alpha}$

2) $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$

Alors $\forall \eta \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n \eta}$.