

Quang le série de Laurent?

Leçon N° 245 : Fonctions biholomorphes et méromorphes en un ouvert de $\mathbb{C}$.

Dans cette leçon, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I) Séries entières.

Définition 1 : On appelle série entière de la variable z (abrégiée par la

série S.E.) toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Lemme 2 : (ABEL) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni bornée, les

$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument.

Définition 3 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. On note $R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. R s'appelle le rayon de convergence de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Proposition 4 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans D .

2) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exemple 5 : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1 / pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge alors que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

Corollaire 6 : Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R > 0$ et

S son somme. Alors S est uniformément $\mathbb{C}$ -déterminable sur le disque

de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in D(0, R)$,

$$g^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{(k+n)!} z^{k+n}.$$

Corollaire 7 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R > 0$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(z)}{n!}.$$

Définition - Proposition 8 : On définit la fonction exponentielle comme

la somme de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ définie sur tout $\mathbb{C}$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 9 : $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$.

$$1) \forall (n, h) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(n+h) = \exp(n) \exp(h)$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) \neq 0$$

$$3) \exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ est surjective.}$$

II) Analyse et biholomorphie.

1) Fonctions développables en séries entières et analytiques.

Définition 10 : 1) On dit que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière

(abrégiée D.S.E.) en 0 lorsque il existe une S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon

de convergence $R > 0$ et $\forall z \in]0, R[$ (et même $\forall z \in]0, R[$), $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

2) On dit que f est D.S.E. en z_0 lorsque $z \mapsto f(z - z_0)$ est D.S.E. en 0 .

Définition 11 : Si f est D.S.E. en z_0 , alors $\exists$ un voisinage

de z_0 sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et son D.S.E. de f en z_0 est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

qu'on appelle série de Taylor de f en z_0 .

Corollaire 12 : Le D.S.E. de f en z_0 est unique lorsque f est unique.

Définition 13 : On dit que f est analytique sur Ω lorsque elle est

D.S.E. en tout point de Ω . On note $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Exemple 14 : Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

$$1) \exp \in \mathcal{A}(\mathbb{C}).$$

Application 15 : En posant $g : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$, $\forall z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}$,

$$\text{et } g'(0) = 1. \text{ Alors on peut D.S.E. } g : g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

on appelle b_n les coefficients de Bernoulli.

$$\text{On a alors } \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g(2\pi) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \quad b_{2k} \text{ ou } b_{2k}$$

est la fonction Zeta de Riemann.

2) Fonctions biholomorphes.

Définition 16 : Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est biholomorphe sur Ω

lorsque f est $\mathbb{C}$ -déterminable en chaque point de Ω . On note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Exemple 17 : Les séries entières sont biholomorphes sur leur disque de

convergence.

Proposition 13: $A(\mathbb{R}) \subset H(\mathbb{R})$.

Proposition 14: Si on voit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ comme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ (c-à-d $f \mapsto (Re f, Im f)$), on a

$$\begin{aligned} \text{Alors } f \in H(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } f \text{ est } \mathbb{R}\text{-différentiable et sa différentielle est une} \\ \text{application linéaire} \\ \text{Au } x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} f + i \frac{d}{dx} g = 0 & (\text{Cauchy-Riemann}) \\ \frac{d}{dx} Re f = \frac{d}{dx} Im f \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 20: $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3) Théorie de Cauchy

Définition 21: Une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ paramétrisée si elle est appelée chemin. Si de plus $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, c'est un lacet.

Définition 22: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet. On définit l'intégrale de γ par $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

Proposition 23: $\forall \gamma$ lacet de $\mathbb{C}$, $\gamma \mapsto \int_{\gamma} f(z) dz$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, nulle sur la composante connexe non bornée.

Théorème 24: Suffisance de Cauchy. Supposons $\mathbb{D}$ connexe. Soit $f \in H(\mathbb{D})$, γ lacet $\subset \mathbb{D}$. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, ou α .

$$f(z) \int_{\gamma} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z-a} dz.$$

Corollaire 25: Soit $f \in H(\mathbb{D})$, $a \in \mathbb{D}$, $R = d(a, \partial \mathbb{D}) > 0$. $\forall \gamma \in D(a, R)$, $f'(z) = \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t-a}$.

Théorème 26: $H(\mathbb{D}) \subset A(\mathbb{D})$.

Exemple 27: $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

III) Propriétés remarquables des fonctions holomorphes

Proposition 28: (Intégralité de Cauchy) Soit f holomorphe sur l'ouvertage du disque $D(a, R)$ admettant le D.S.E.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ pour } |z-a| < R.$$

$$\text{Pon } 0 \leq r < R, \text{ posons } M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

$$\text{Alors } |f(z)| \leq \frac{M(r)}{r} \quad \forall r > |z-a|, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Théorème 29: (Liouville) Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée est constante.

Application 30: (S'Alent - Gauss) $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Théorème 31: (Principe des zéros isolés) Si $\mathbb{D}$ est connexe et $f \in H(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. On note $Z(f) = \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\}$. Alors :

1) $z \in Z(f)$, $\exists \delta > 0$ tel que $\mathbb{D} \setminus Z(f) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \text{ avec } g(a) \neq 0.$$

2) $Z(f)$ est un ensemble dénombrable et ses points sont isolés dans $\mathbb{D}$.

Théorème 32: (Principe de prolongement analytique). Soit $\mathbb{D}$ connexe et soit $f \in H(\mathbb{D})$ égale sur un partie E de $\mathbb{D}$ qui possède un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$. Alors $f = g$.

Théorème 33: (Principe du maximum) Supposons $\mathbb{D}$ connexe bornée et $f \in H(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{D}$ non constante. Alors $\max_{\partial \mathbb{D}} |f(z)| = \max_{\mathbb{D}} |f(z)|$.

IV) Stabilité des fonctions holomorphes

Théorème 34: (Holomorphie sous $\int$). Soit (T, N) une espace mesuré et soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \int T \times N$ tel que $F(t) \in \int T \times N$ est vérifié.

- 1) $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\gamma, t) \in L^1(N)$
- 1) $\exists N = T$ négligeable tel que $t \in N \rightarrow \int T f(\gamma, t) \in H(\mathbb{R})$
- 3) $\forall K \subset \mathbb{R}$ compact, $\exists \delta \in L^1(N)$ telle que

$|\{f(z, t) \mid \leq g(z, t) \forall z \in U \text{ et } t \in \mathbb{R}^N$.

Alors $F \in H(\Omega)$ et en plus, $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \, d\mu(t) \forall z \in \Omega$.

Application 35: Soit fonction convexe d'ordre α de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) = \int_0^1 f(tx + (1-t)y) \, dt \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 36: (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers f . Alors $f \in H(\Omega)$ et

$(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' (sur compact vers f').

Exemple 37: On peut définir $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ comme une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

V) Fonctions méromorphes.

1) Définitions.

Définition 38: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ telle que $f(z) = g(z) + \frac{h(z)}{(z-a)^k}$ avec $g, h \in H(\Omega \setminus \{a\})$ et $h(a) \neq 0$.

Définition 39: Soient $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ et $g \in H(\Omega)$ et

un polynôme d'ordre m pour f (compensé) $\frac{h(z)}{(z-a)^k}$ avec $h(a) \neq 0$ et

$C = m - k$ tel que $f(z) = g(z) + \frac{h(z)}{(z-a)^k}$ soit une singularité

efférente en a .

Le terme $\frac{h(z)}{(z-a)^k}$ s'appelle la partie principale de f en a .

Le coefficient C s'appelle l'ordre de la singularité de f en a (noté $\operatorname{Res}(f, a)$).

Définition 40: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, on dit que f est méromorphe sur Ω

si A n'a pas de points intérieurs dans Ω .

2) $f \in H(\Omega \setminus A)$

3) f a une pôle en chaque point de A .

Exemple 41: On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

$\Gamma: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction méromorphe

sur $\mathbb{C}$. Le prolongement se définit comme $\Gamma(z) = \frac{1}{z}$ si $\operatorname{Re}(z) > 0$ et

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots$$

analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$.

2) Théorème des résidus.

Théorème 42: (des résidus) Soit f une fonction méromorphe sur Ω .

Soit A l'ensemble des pôles de f dans Ω , borné, et γ un cycle dans Ω , borné et

à zéro dans Ω et ne contenant pas A .

$$\text{Alors } \int_{\gamma} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a).$$

Application 43: La fonction caractéristique de $\mathbb{Z}$ est la fonction

$$\chi(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Lemme 44: Soit f une fonction méromorphe sur Ω

vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists N_k$ tel $\forall n \geq N_k$, $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^k}$ pour $|z| > N_k$.

Alors la somme de toutes les résidus de f est nulle.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.

On peut utiliser le lemme de Liouville.