Leçon N° 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

I) Fonctions usuelles

1) Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

Définition 1 : Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est polynomiale lorsque $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = P(x)$.

Proposition 2 : Toute fonction polynomiale est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 3 : Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est rationnelle lorsqu'il $\exists F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $\forall x \in \mathbb{K}$ tel que x n'est pas un zéro du dénominateur de F, $f(x) = F(x)$.

Proposition 4 : Toute fonction rationnelle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{K}$ privé des zéro de son dénominateurs.

Théorème 5 : (Weierstrass) Toute fonction continue sur un segment réels. dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiale sur ce segment.

2) Fonctions exponentielles et logarithmes

Proposition-Définition 6 : $\forall z \in \mathbb{K}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Cela permet de définir la fonction exponentielle.

Proposition 7 : 1) $\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$

2) $\forall z \in \mathbb{K}$, $e^z \neq 0$ et $e^0 = 1$

3) $\exp' = \exp$

4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

5) $\exists \pi > 0$ tq $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $\left((e^z = 1) \Leftrightarrow \frac{z}{2i\pi} \in \mathbb{Z}\right)$

6) $\exp$ est périodique de période $2i\pi$.

7) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective ~~et non injective~~.

Proposition-Définition 8 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit le logarithme népérien comme sa bijection réciproque. On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cette fonction.

Proposition 9 : $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Définition 10 : 1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z tout nombre réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = z/|z|$ et on appelle détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ notée $\mathrm{Arg}\, z$, l'unique argument de $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ appartenant à $]-\pi, \pi[$.

2) Si $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle logarithme de z tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$ et on appelle détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ notée $\log$ la fonction qui à $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ associe $\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$.

Proposition 11 : $\forall z \in B(0,1)$, $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

Définition 12 : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha := \exp(\alpha \log(z))$

3) Fonctions trigonométriques et circulaires

Proposition-définition 13 : $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui sont bien définis.

Proposition 14 : 1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$

2) cos, sin, ch et sh sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{K}$ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

3) $\forall z \in \mathbb{K}$, $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\mathrm{ch}(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ et $\mathrm{sh}(z) = \frac{1}{2i}(e^z - e^{-z})$

Théorème 15 : (Weierstrass bis). Toute fonction continue 2π-périodique de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynomes trigonométriques.

On trouvera en annexe les graphes des fonctions usuelles ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

II) Fonctions spéciales

1) Fonction Γ d'Euler et fonction Beta

Définition 16: Pour $x>0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Théorème 17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$.
$f = \Gamma$ ssi f vérifie
a) $f(x+1) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
b) $f(1) = 1$
c) $\ln f$ est convexe sur $]0, +\infty[$

Corollaire 18: $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

Théorème 19: On note $\mathcal{O} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$.
On peut définir Γ sur $\mathcal{O}$, par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.
Ainsi défini, Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
Le prolongement en l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ analytique est
$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Théorème 20: Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, égalité se prolongeant en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Théorème 21: On peut caractériser Γ sur $\mathcal{O}$ comme étant l'unique fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$ vérifiant a) et b) et bornée sur $B := \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \le \mathrm{Re}(z) \le 2 \}$.

Corollaire 22: $\forall z \in \mathcal{O}$, $2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \, \Gamma(2z)$.

Théorème 23: En notant $\gamma := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ (constante d'Euler)
on a que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$

Proposition - définition 24: Pour $x, y > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et on pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

Proposition 25: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x,y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) \, d\theta$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*$, $B(y,x) = B(x,y)$ et $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$.

Théorème 26: $\forall x, y > 0$, $B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$.

Application 27: Soient $a, b > 0$ et X une variable aléatoire :
- On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre a (noté $X \sim \mathcal{E}xp(a)$) lorsque elle admet comme densité $x \mapsto a e^{-ax} \mathbb{1}_{x \ge 0}$.
- On appelle loi Gamma $\Gamma(a,b)$ la loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{x \ge 0}$

On a alors si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0$,
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.
et si X et Y sont deux v.a. indépendantes de loi $\Gamma(\alpha,1)$, $\Gamma(\beta,1)$.
alors $X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, 1)$.

Proposition 28: Si $X \sim \Gamma(p, \theta)$,
$E[X] = p/\theta$
$V(X) = p/\theta^2$
et la fonction caractéristique de X est $\Phi_X : t \mapsto \frac{1}{(1 - i\theta t)^p}$

Application 29: Une v.a X à valeurs dans $]0,1[$ suit une loi bêta de paramètre $p, q > 0$ lorsque elle a densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $x \mapsto \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} \mathbb{1}_{]0,1[}$.
$E[X] = \frac{B(p+1,q)}{B(p,q)}$
$V(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.

Proposition 30 : Si X et Y sont indépendantes de lois $\gamma(p)$ et $\gamma(q)$, alors $\frac{X}{X+Y} \sim \beta(p,q)$ et $\frac{X}{X+Y} \perp\!\!\!\perp X+Y$.

2) Fonction ζ de Riemann et η de Dirichlet.

Définition 31 : Soit $s > 1$, la fonction ζ de Riemann est définie par $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$
et on pose $\eta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$.

Proposition 32 : $\forall s > 1$, $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$
et $\lim_{s \to 1^+} \eta(s) = \ln(2)$

Corollaire 33 : ζ se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en $s = 1$ qui est simple et de résidu 1.

Définition - Proposition 34 : Soit $f : \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$

f est développable en série entière en 0
On pose alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ où les b_n sont appelés les coefficients de Bernoulli.

Proposition 35 : $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ et $b_n \in \mathbb{Q}$.

Théorème 37 : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2q) = (-1)^{q-1} \frac{(2\pi)^{2q}}{2(2q)!} b_{2q}$

Exemple 38 : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 39 : On a la décomposition en produit eulérien

$\forall s > 1$, $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

Corollaire 40 : La série $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge