

Leçon N° 243 : Séries entières, propriétés de la somme, Exemples et applications.

Par la suite : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent des éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

X est une partie non vide de $\mathbb{K}$ et $x_0 \in X$.

$\mathcal{S}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$.

II) Convergence des séries entières

1) Définitions et rayon de convergence

Définition 1: On appelle série entière de la variable z (abrégée par la suite S.E.) toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Définition 2: On appelle somme de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Lemme 3: (Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{K}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $\forall z \in \mathbb{K}$ tq $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument.

Définition 4: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E.. On note $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. R s'appelle le rayon de convergence de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $D := D(0, R) = \{z \in \mathbb{K} \text{ tq } |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Proposition 5: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence R .

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans D .

2) $\forall z \in \mathbb{K}$ tq $|z| > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exemple 6: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, mais $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ diverge alors que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ converge.

Corollaire 7: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme. Alors $S \in \mathcal{C}^\infty(D(0, R), \mathbb{C})$ et

$\forall h \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D(0, R)$, $S^{(h)}(x) = \sum_{n=h}^{\infty} \frac{n!}{(n-h)!} a_n x^{n-h}$ on $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e$

de quelle dérivée parle-t-on ?

C'est la dérivée de la fonction exponentielle comme d'habitude ou même rayon de convergence !

Corollaire 8: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence $R > 0$ $\forall h \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemple 9: $\forall x \in]-1, +1[$, $\forall h \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-x)^{h+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h+1)!}{n!} x^n$.

Définition 10: (Produit de Cauchy). $\forall a \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ La S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ est appelée le produit de Cauchy des S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Si R_a et R_b désignent les rayons de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ respectivement, alors $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ a un rayon de convergence R qui vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{K}$ tq $|z| < R$, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$.

2) Méthode de calcul du rayon de convergence

Dans ce paragraphe, on pose $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition 11: (Règle de d'Alambert) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. tq $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On note R son rayon de convergence. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{l}$.

Exemple 12: La S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Proposition 13: (Formule de Cauchy-Hadamard) On note $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une S.E. le rayon de convergence R , on a $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 14: La S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{2}$.

Exemple 15: Soit (X_n) une suite de V.A. tq $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|] < +\infty$, alors la S.E. aléatoire $\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$ a un rayon de convergence p.s. déterministe et ≥ 1 .

Corollaire 16: (Règle de Cauchy) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence R . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$, alors $R = \frac{1}{l}$.

3) Exponentielle et séries entières

Définition - Proposition 17: On définit la fonction exponentielle comme

La somme de la S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ définie sur tout $\mathbb{C}$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Propositions 18: 1) $\exp \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et $\forall h \in \mathbb{N}$, $\exp^{(h)} = \exp$.

2) $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$

4) $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective.

Définition - Proposition 19: On définit les fonctions trigonométriques sur $\mathbb{C}$. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

II) Fonctions analytiques

1) Fonctions développables en séries entières

Définition 20: 1) On dit que $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en séries entières en 0 lorsqu'il existe une S.E. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $\forall r \in]0, R[$ on $B(0, r) \subset X$ et $\forall z \in B(0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

2) On dit que f est développable en S.E. en z_0 lorsqu'on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est développable en S.E. en 0.

Définition - Proposition 21: Si f est développable en S.E. en z_0 , alors

Il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est la limite d'une suite de fonctions polynômes en S.E. de f en z_0 est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ qu'on appelle série de Taylor de f en z_0 .

Corollaire 22: Le développement en S.E. de f en z_0 est unique lorsqu'il existe.

Contre-exemple 23: d'une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas développable en S.E. en 0: $x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Définition 24: On dit que f est analytique sur Ω lorsqu'elle est développable en S.E. en tout point de Ω . On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω .

Exemple 25: 1) Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

2) $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

2) Fonctions holomorphes

Proposition 26: Soit Ω un $\mathbb{C}^n$ une S.E. de diamètre de convergence D . Soit S sa somme. Alors 1) $S \in \mathcal{H}(\Omega)$ (i.e. S est holomorphe sur Ω).

2) $S \in \mathcal{H}(D)$

Proposition 27: $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{H}(S)$

Lemme 28: (Formule intégrale de Cauchy pour un cercle).

Soient $f \in \mathcal{H}(D)$, $a \in D$, $r > 0$ tel $\overline{B}(a, r) \subset D$, $z \in B(a, r)$, $|z - a| < r \subset D$.

$$\text{Alors } \forall z \in B(a, r), \int_{\partial B(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = 2i\pi f(z)$$

Théorème 29: Soient $f \in \mathcal{H}(D)$, $a \in D$, $R := d(a, D^c) > 0$.

$$\forall z \in D(a, R), f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-1}$$

Corollaire 30: $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{A}(D)$.

Exemple 31: $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Théorème 32: (Principe des zéros isolés) Si f est continue et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$. On note $Z(f) := \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$. Alors:

1) $\exists \varepsilon > 0$ tel $\forall z \in Z(f)$, $\exists r > 0$ tel $B(z, r) \cap Z(f) = \{z\}$ holomorphe tel que $f(z) = (z - a)^k g(z)$ avec $g(a) \neq 0$.

2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω .

Théorème 33: (Inégalité de Cauchy). Si f est holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a, R)$ admettant le développement

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ pour $|z-a| \leq R$. On note pour $0 \leq r \leq R$
 $R(r) := \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. Alors $|C_n| \leq \frac{R(r)}{r^n}$ $\forall n \geq 0$ et $\forall r \leq R$.

Corollaire 33: (Liouville) Si $f \in H(\mathbb{C})$ et bornée, alors f est constante.
Application 34: (D'Alembert-Goursat): $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

III) Applications

1) Fonctions génératrices

Définition 35: Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
 On définit la fonction génératrice G_X de X comme étant la somme de la S.E. $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k$

Deg 1.

Proposition 36: 1) Le rayon de convergence de la S.E. définissant G_X est ≥ 1 .

2) $\forall R \in \mathbb{N}$, $P(X=R) = \frac{1}{R!} G_X^{(R)}(0)$ i.e. G_X caractérise la loi de X .

3) Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 37: Soit $v \in \mathbb{N}^*$. X admet un moment d'ordre $v \in \mathbb{N}^*$ si G_X est v fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas: $E[X(X-1)\dots(X-v+1)] = G_X^{(v)}(1)$

Exemple 38: (Théorème de Poisson) Soient $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de

v.a. telle que $X_n \hookrightarrow B(n, p_n)$, $\lambda > 0$.

On note G_n la fonction génératrice de X_n et G la fonction génératrice d'une v.a. $\hookrightarrow P(\mathbb{N})$.

Si $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $n p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, alors $G_n(s) \rightarrow G(s) \forall s \in \mathbb{R}$.

2) Résolution d'équations différentielles linéaires

Deg 2

Exemple 39: (Equation de Bernoulli)

On considère l'équation différentielle (E): $x y'' + y' + x y = 0$

1) L'ensemble des solutions de (E) développables en S.E.

autour de 0 est $\left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

2) $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est l'unique solution

de cette forme qui vaut 1 en 0

3) Si f est une solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]0, \alpha[$,

alors on a l'équivalence:

(f, f_0) est linéaire $\Leftrightarrow f$ admet une borne au voisinage de 0

Exemple 40: $\forall x \in]-1, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$