

Leçon N° 233: Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon $(X, \mathcal{R}, \rho)$ est un espace mesuré.

I) Les outils.

1) Théorème de convergence dominée

Théorème 1 (Convergence monotone) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$.

On pose $V_n \in X, f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in [0, +\infty]$

Alors f est mesurable et $\int_X f_n d\rho \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\rho$.

Lemme 2: (f_n) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$

Alors $\int_X (\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n) d\rho \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\rho$

Théorème 3 (Convergence dominée). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X et f une fonction mesurable sur X telle que

1) (f_n) converge simplement sur X vers f

2) $\exists g \in L^1(\rho)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$

Alors 1) $f \in L^1(\rho)$ et $\int_X f d\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\rho$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\rho = 0$ En particulier $\int_X f_n d\rho \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\rho$

Exemple 4: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

Contre-exemple 5: L'hypothèse de domination est importante:

q $f_n = 1_{[n, n+1]}, \int_X f_n = 1 \nrightarrow 0$

2) Transport de régularité sous le signe intégral. Espaces vectoriels.

Théorème 6: Soit $f: E \times X \rightarrow \mathbb{R}$, (conjointement)

Si 1) $\rho \times \mu \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, t \mapsto f(t, x)$ est continue sur E
 2) $\forall K$ compact de $E, \exists g_K \in L^1(\mu)$ positive telle que $|f(t, x)| \leq g_K(x)$

Alors F est définie et continue sur E on $f: t \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$
Théorème 7: (classe $\mathcal{C}^2$ sous $\int$). Soit $f: E \times X \rightarrow \mathbb{R}, E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$

Si 1) $\forall t \in (a, b), x \mapsto f(t, x)$ est $L^1(\mu)$

2) $\rho \times \mu \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, t \mapsto f(t, x) \in \mathcal{C}^2(I)$ de dérivée $\frac{\partial}{\partial t} f$

3) $\forall g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \forall K$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ positive telle que $|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)| \leq g_K(x)$

Alors 1) $\forall t \in I, \forall g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \in L^1(\mu)$

2) $F \in \mathcal{C}^2(I)$ et $F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) d\mu(x)$

Application 8: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est semi-convergente

Théorème 9: (Holomorphie sous $\int$) $E = \Omega$ ouvert d'un $\mathbb{C}$.

$\exists E \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $F \mapsto \int_X f(z, x) d\mu$

Si 1) $\rho \times \mu \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω

2) $\forall K \subset E$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ positive telle que $|f(z, x)| \leq g_K(x), \forall z \in K, \forall x \in X$

Alors F est holomorphe et bien définie dans Ω et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega,$

$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z, x) d\mu(x)$

Exemple 10: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f: \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Alors $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(z, x) d\mu(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. $z \mapsto \exp(-\frac{z^2}{2}) \exp(\frac{z^2}{2})$

II) Convergence et régularisation.

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}^d$, $f, g \in L^1(+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Définition et première propriété.

Définition 11: On appelle produit de convolution de f et g la fonction :

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \text{ lorsque cela a un sens.}$$

Proposition 12: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g$ est définie pp.

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Proposition 13: Si $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in C^0$ et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Proposition 14: Si f est bornée sur $\mathbb{R}^d$ compact, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact, $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 15: $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ muni de $*$ est une algèbre de Banach commutative.

Exemple 96: Soient X, Y deux $k \times k$ matrices à éléments f_X, f_Y sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 97: Soient $q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 16: Si $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 17: Si $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

2) Régularisation et approximation de δ à l'unité.

Définition 18: On appelle approximation de δ à l'unité une suite (ρ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \geq 0, \|\rho_n\|_1 = 1$$

$$\text{et } \forall S > 0, \int_{|x| > S} \rho_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si $\forall n, \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, (c'est le cas d'une suite régularisante).

Exemple 98: $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{(1-x^2)^n}$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon.

est une suite régularisante.

Proposition 21: $\forall (X_n)$ suite régularisante et $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$f * \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Application 22: (théorème de Weierstrass) soient $J \subseteq \mathbb{R}$ un segment, $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. f est limite sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 23: Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit K compact de Ω .

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ telle que } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 1 \\ \varphi = 1 \text{ sur } K \\ \varphi = 0 \text{ hors de } \Omega. \end{cases}$$

Théorème 24: $\forall \lambda \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

III) Transformation de Fourier.

1) Généralités.

Définition 25: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f par $\hat{f} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i \langle x, y \rangle} f(y) dy$.

Exemple 26: Pour $g : \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha |x|^2}$, $\hat{g} : \xi \mapsto \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}}$.

Proposition 27: La transformée de Fourier envoie $L^1_{\text{rap}}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

De plus, elle est injective.

Proposition 28: Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{e^{i \langle \lambda, \cdot \rangle} f} = e^{i \langle \lambda, y \rangle} \hat{f}(\xi) = \tau_y \hat{f}(\xi)$$

Proposition 29: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} = (\mathcal{F})^{-1} f$ pp.

Exemple 30: Si $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

Proposition 31: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f * g} = (\mathcal{F})^{-1} \hat{f} \hat{g}$.

2) Fonctions caractéristiques et probabilités.

de la
possible

monop
inter
de
Four

Dans cette section X est un v.a. réel sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 32: On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\phi_X: t \mapsto E(e^{i \langle t, X \rangle})$.

Théorème 33: La fonction caractéristique caractérise la l.v.

Proposition 34: Soit $X \perp Y$, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

Exemple 35: 1) Si $N \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\phi_N(t) = e^{i \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}$.

2) Si $c \sim \mathcal{C}(a, b)$, $\phi_c(t) = e^{i a t} e^{-b |t|}$.

Théorème 36 (Lévy): Soit (X_n) une suite de v.a.

$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ ssi $\phi_{X_n} \xrightarrow{\text{unif}} \phi_X$.

Application 37: (Théorème central limite) Soit (X_n) une suite de v.a. iid

dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\mu = E[X_1]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$

on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \xrightarrow{\text{loi}} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

IV) Fonction Γ et Euler.

Définition 38: Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable

sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Théorème 39: Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$f = \Gamma$ on vérifie $\begin{cases} a) f(x+1) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ b) f(1) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ la f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Corollaire 40: $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{2\pi}{n!} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Théorème 41: On note $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{C}^1 \text{ tq } \text{Re}(p) > 0\}$.

On peut définir Γ sur $\mathcal{P}$ par $\forall p \in \mathcal{P}$, $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} p(t) dt$.

Ainsi définie, Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Le prolongement sur $\mathbb{C}$ est donné comme $\Gamma \setminus \{1-N\}$ méromorphe.

est $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! (z+n)} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{z-1}}{t} dt$.

Application 42: Soient $a, b > 0$ et X un v.a. réel.

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre a

consignée elle est p.m. densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$x \mapsto a e^{-ax} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

On appelle loi Gamma $\Gamma(a, b)$ la loi à densité par rapport

à la mesure de Lebesgue $x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-bx} x^{a-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}$.

On a alors si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. iid de loi $\mathcal{E}(1)$, $\lambda > 0$,

$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, 1)$

et si X et Y sont deux l.v. de loi $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$,

alors $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$.

Proposition 43: Soit $X \sim \Gamma(p, \theta)$,

$E[X] = p\theta$

$V(X) = p\theta^2$

et la fonction caractéristique de X est $\phi_X: t \mapsto \frac{1}{(1-i\theta t)^p}$.