

Leçon N° 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Pour toute cette leçon, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Premières méthodes en dimension 1.

1) Usage des primitives.

Théorème 1 : (Fondamental de l'analyse) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b])$, alors f admet une primitive continue sur $[a, b]$.
 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($\gamma : F' = f$) et $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$.

Exemple 2 : 1) Pour $a \neq 0$, les primitives de $\frac{1}{x^2 + a^2}$, $\frac{1}{x^2 - a^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ sont respectivement $\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$, $\frac{1}{2a} \ln|\frac{x+a}{x-a}|$, $\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

Exemple 3 : 1) Si $a < 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1-a}$.

2) Si $a > 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1-a}$.

3) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = \pi$.

2) Décomposition en éléments simples.

Théorème 4 : Soient $F \in \mathcal{M}(X)$, $F \neq 0$ et $F = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux, Q unitaire. On note $Q = Q_1^{a_1} \dots Q_n^{a_n}$ la décomposition de Q en facteurs irréductibles de $K[X]$.

On peut écrire de manière unique $F = E + \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^{a_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j})$ avec $E \in \mathcal{M}(X)$, $A_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ et $\deg(A_{ij}) < \deg(Q_i)$.

Exemple 5 : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Application 6 : Une primitive de $x \mapsto \frac{1-x}{x^2+n+1}$ est $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+n+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{x+1}{\sqrt{3}})$.

3) Intégration par parties.

Théorème 7 : Soient $u, v : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$.

Exemple 8 : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Exemple 9 (Fonction Γ d'Euler) : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Alors $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exemple 10 (Intégrale de Wallis) : Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$, alors $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Application 11 : $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$.

II) Permutation d'intégrale avec d'autres symboles.

1) Convergence absolue.

$(X, \mathcal{E}, p)$ est un espace mesuré.

Théorème 12 (Convergence mesurée) : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $\forall x \in X$, $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f est mesurable et $\int_X f_n dp \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f dp$.

Lemme 13 (Fatou) : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors $\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n dp \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dp$.

Théorème 14 : Soient (f_n) et f des fonctions mesurables sur X telles que 1) (f_n) converge simplement sur X vers f . 2) $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors 1) $f \in L^1$ et $\int_X f dp = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dp$.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| dp = 0$ en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dp = \int_X f dp$.

Application 15 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

2) Régularité sous le signe $\int$.

Théorème 16 : Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que

- 1) $\forall t \in \mathbb{I}, t \mapsto f(t, u)$ est intégrable sur X .
 - 2) $\forall t \in X, u \mapsto f(t, u)$ est continue sur $\mathbb{I}$.
 - 3) $\exists g \in L^1(X)$ telle que $\forall u \in \mathbb{I}, \forall t \in X, |f(t, u)| \leq g(t)$
- Alors $F: u \mapsto \int_X f(t, u) dt$ est continue sur $\mathbb{I}$.
- Théorème 12: Soit $f: X \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en $\mathbb{I}$ intervalle sur $\mathbb{R}$ telle que
- 1) $\forall u \in \mathbb{I}, t \mapsto f(t, u)$ est intégrable sur X
 - 2) $\forall t \in X, u \mapsto f(t, u)$ est dérivable sur $\mathbb{I}$
 - 3) $\exists g \in L^1$ telle que $\forall u \in \mathbb{I}, \forall t \in X, \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) \right| \leq g(t)$
- Alors $F: u \mapsto \int_X f(t, u) dt$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et,
- 2) $\forall u \in \mathbb{I}, F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) dt$.

Application 12: En introduisant $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$

on obtient que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 13: Γ est φ sur $\mathbb{R}^+$.

III) Calculs d'intégrales multiples

1) Changement de variables

Théorème 20: Soient U, V ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Une fonction f mesurable est intégrable sur V ssi $(f \circ \varphi) | \det J\varphi |$ est intégrable sur U et dans ce cas, on a

$$\int_U f(u) du = \int_U (f \circ \varphi)(t) | \det (J\varphi)(t) | dt$$

Exemple 21: $\varphi: \mathbb{R}^2 \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2) Théorème de Fubini

Théorème 22: (Fubini-Tonelli) Soit f une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Alors $(y, x) \mapsto f(x, y)$ est mesurable

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}^{d_1}, y \mapsto f(u, y) \text{ est mesurable} \\ 2) \int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy \\ = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Théorème 23: Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Si f est intégrable, alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Application 24: On a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Application 25: Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $B_{d,1} = \{x \in \mathbb{R}^d, x^2 \leq 1\}$ et $B_{d,2}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^d$ et $v_d = \mu_d(B_{d,1})$ son volume.

$$\text{Alors } v_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} \text{ si } d \text{ pair et } v_d = \frac{2^d}{d!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{d/2} \text{ si } d \text{ impair.}$$

IV) Utilisation des fonctions holomorphes

Théorème 26: (Holomorphie sous $\int$): $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$f: E \times X \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } t \mapsto \int_X f(t, x) dx$$

Si 1) $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est holomorphe sur E

2) $\forall x \in E, \int_X f(t, x) dx$ converge, $\exists g \in L^1(x)$ telle que

$$|f(t, x)| \leq g(x), \forall x \in E, |f(t, x)| \leq g(x)$$

Alors f est holomorphe, holomorphe et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in E, f^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(z, x) dx$$

Théorème 27 (des résidus) Soit f holomorphe sur $\Omega \setminus A$ où $A \subset \Omega$ est fini et où l'ensemble des pôles de f , soit S un ensemble sans l'origine ne rencontre pas A .

Alors, $\int_S f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \in A} \text{Res}(f, z) \text{Ind}_S(z)$.

Théorème 28 (calcul pratique des résidus) : Soit Ω ouvert réel, $z \in \Omega$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Si z est un pôle d'ordre m , alors $\text{Res}(f, z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$.

Applications 29-1) La fonction caractéristique de $N \sim N(m, \sigma^2)$

est $\phi_N(t) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

2) La fonction caractéristique de la loi de Cauchy ($\mathcal{C}(a, b)$) est $\phi_C(t) \mapsto e^{iat} e^{-b|t|}$.

Définition 30) Pour X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ réel-valued dans $\mathbb{R}^n$, on définit sa fonction caractéristique :

$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}[e^{it \cdot X}]$.

IV) Approximation numérique.

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Soit

$0 \leq n \in \mathbb{N}$, $a < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. On

note $|T| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ son pas.

Soit $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de v.a.s telle que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Proposition 31 Avec les notations précédentes :

on a $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 32 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)$.

Méthode 33 (des rectangles) On peut choisir des v.a.s par valeurs pour les $\xi_i = x_i$ ou $\xi_i = x_{i-1} + \lambda$ (cf remarque)

Méthode 34 (des trapèzes) On peut aussi approximer f par ses la valeur par des trapèzes. On peut évaluer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}$.

Cette somme convergeant vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque $|T| \rightarrow 0$. (cf remarque)

Proposition 35 : Pour une subdivision régulière $\frac{b-a}{n}$,

si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ la méthode des rectangles est en $O(\frac{1}{n})$

si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ la méthode des trapèzes est en $O(\frac{1}{n^2})$

Intégrale de Fejér