

Leçon N° 2

SO : série de nombres réels, en complexes

Soit $u_k = R \text{ ou } C$.

I) Séries numériques

1) Généralisation

Définition 1: Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général (u_n) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. On dit que la série converge si (S_n) converge et on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de la série. Si c'est le cas, on appelle reste d'ordre n $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + R_n$.

Exemple 1: 1) (Séries numériques) Les séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ où $a \in \mathbb{K}$ et $|a| < 1$ convergent vers $\frac{1}{1-a}$. Les sommes partielles de cette série valent $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ convergent si $|q| < 1$. Si $q \neq 1$, les sommes partielles valent $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $|q| < 1$, les restes partielles valent $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition 3: Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$.

Définition 4: On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 5: Si $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge.

Proposition 6: Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge et les restes $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ vérifient $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

2) Séries à termes positifs

Comportement des restes en des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Proposition 8: Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la somme partielle est majorée.

Proposition 9: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs strictement croissants. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

1) Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 10: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs strictement croissants. Alors :

1) Si $\sum u_n$ converge, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

2) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

Théorème 11: (comparaison série intégrale) Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. Alors la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$ est convergente. (cf Annexe 1)

en particulier $\sum f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Application 12: 1) (Lemme) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = H_n - \ln(n)$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = H_n - \frac{1}{n}$ vérifie (u_n) et (v_n) sont équivalentes et convergent vers une constante $\gamma > 0$ (constante d'Euler).

2) La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et admit comme développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O(\frac{1}{n^3})$.

Exemple 13: (Série de Riemann) $\forall \alpha \in \mathbb{R},$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. (Série de Bertrand) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$ la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha} (\log(n))^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3) Autres critères de convergence

Proposition 14: Soit (u_n) une suite numérique. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si (u_n) converge.

Exemple 15: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ converge.

Proposition 16: Soit $\sum u_n$ une série numériquement et soit $L = \limsup |u_n|$ (règle de Cauchy)

Alors 1) si $L < 1$, $\sum u_n$ converge absolument

2) si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Exemple 17: $\sum (1 - \frac{1}{n})^n$ converge

Proposition 18: (règle de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série numériquement non nulle à partir d'un certain rang. On note

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \quad \text{et} \quad R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

Alors 1) si $L < 1$, $\sum u_n$ converge absolument

2) si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Exemple 19: Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a^n}{n}$,

$\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $|a| < 1$.

Proposition 20: (règle d'Abel) Soit $\sum u_n$ une série numériquement. On suppose

que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n v_n$ où

$$(a_n) \subset \mathbb{R}^+ \quad , \quad a_n \searrow \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty$$

Alors $\sum u_n$ converge

Exemple 21: $\sum \frac{e^{-n/2}}{n}$ converge $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition - Proposition 22: Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries

absolument convergentes. Alors la série $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

est appelée produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et elle est

absolument convergente. De plus, on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

II) Utilisation d'autres types de séries.

A) Séries entières

Définition 23: On appelle série entière toute série de fonctions de la

forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $(a_n) \subset \mathbb{K}$ et $z \in \mathbb{K}$.

Proposition - définition 24: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. $\mathbb{R} \geq 0$ dit être

le rayon de convergence de la série

$$R = \sup \{ r > 0 \mid (|a_n| r^n)^{1/n} \text{ est bornée} \}$$

On appelle $\mathbb{C}$ le rayon de convergence de la série

Proposition 25: Avec les mêmes notations, $\forall z \in \mathbb{B}(0, R)$, la série

converge absolument, $\forall \mathbb{K}$ compact $\subset \mathbb{B}(0, R)$, la série

converge normalement.

Exemple 26: La série entière est $\sum z^n$ en $\mathbb{B}(0, 1)$ et on peut

dériv terme à terme.

Définition 27: Une fonction $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est développable en série

entière sur un voisinage de $a \in \mathbb{K}$ lorsqu'il existe un voisinage V_a de

$$a \quad \forall z \in V_a, \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z-a)^n \quad \text{où} \quad (a_n) \subset \mathbb{K}$$

2) Séries de Fourier.

Définition 28: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction 2π -périodique et

continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourier de f

$$a_n, b_n$$
 les nombres complexes définis par $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

On appelle série de Fourier de f la série $S_n(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikn}$.

théorème 29: (égalité de Parseval) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ 2π -périodique

continue par morceaux. Alors la série $\sum |a_n(f)|^2$ converge

$$\text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

théorème 30: (Dirichlet) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ 2π -périodique, continue

par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$g(t) = f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - f(t_0) - f(t_0)$$

soit bornée

alors la série de Fourier $\sum a_n e^{in t_0}$ converge et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n(f) e^{int_0} = \frac{f'(t_0^+) + f'(t_0^-)}{2}$$

3) Application, calcul de $\mathbb{P}(20)$

Application 34: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ b.c.
 On $\mathbb{P} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et on a b_n est le n-ième coefficient
 de Bernoulli défini par : $b_1 = \frac{1}{6}$ et $b_3 = \frac{1}{42}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$,
 et $f(0) = 1$, alors $f'(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} 3^n$.

III) Utilisation en probabilités

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 32: On définit l'espérance de X comme $E[X]$ si

On dit que X est intégrable lorsque $\sum_{i=1}^{\infty} i \mathbb{P}(X=i) < +\infty$
 et on définit l'espérance de X comme $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbb{P}(X=i) \in \mathbb{R}_+^*$

Exemple 33: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, $\lambda > 0$

- 1) Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $E[X] = p$
- 2) Si $X \sim \mathcal{G}(n, p)$, $E[X] = np$
- 3) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $E[X] = \lambda$

Définition 34: On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans $(E, \mathcal{P}(E))$ est dite convergente si la chaîne est homogène
 chaîne de Markov lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$ tel que
 $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$

$$\mathbb{P}(X_n = i_n \mid \bigcap_{j=0}^{n-1} X_j = i_j) = \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

Si cette probabilité ne dépend pas de n , on dit que la chaîne est homogène.

Définition 35: Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à valeurs dans E un plan séparable. Soit $i \in E$.

On note $N_i = \#\{n > 0, X_n = i\}$.

$$\tau_i^{-1} = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}$$

$$\forall n > 1, \tau_i^n = \inf\{n > \tau_i^{n-1}, X_n = i\}$$

Définition 36: Un point $i \in E$ est dit récurrent lorsque $\mathbb{P}(\tau_i < +\infty) = 1$
 Sinon il est dit transient.

Proposition 37: i est récurrent ssi $E[N_i] = +\infty$.

Application 38: $\forall i \in \mathbb{N}$, la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ est récurrente ssi $k \leq 2$.

On peut parler aussi des fonctions génératrices.

Tout est égal de l'autre

des
possible