

Leçon N° 2.2.9 : Fonctions monotones, fonctions

I) Fonctions monotones.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition 1: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante (resp. décroissante) lorsque $\forall (x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

Remarque 2: Une inégalité stricte dans la définition ci-dessus permet de définir les fonctions strictement croissantes et décroissantes.

Proposition 3: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors f est croissante sur I si $f' \geq 0$ sur I .

Exemple 4.1) $x \mapsto x^2 + b$ est croissante si $x \geq 0$, décroissante sinon.

2) $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Définition 5: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si f est croissante sur I en décroissance sur I .

Proposition 6: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, alors f est injective. Si de plus f est continue, c'est une équivalence.

Proposition 7: Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}^+$.

1) Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ l'est aussi.

2) Si f et g sont croissantes décroissantes, alors fg aussi.

3) Si f est croissante alors $f \circ g$ est de même monotonie si g est croissante et strictement.

Exemple 8: $x \mapsto \exp(-x^2)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$.

2) Fonctions monotones et limites.

Théorème 9: (Limite monotone) Soit $f: I =]a, b[$ est monotone, alors $\forall x \in I$, f admet une limite en a^+ et en b^- ainsi qu'une limite (éventuellement infinie) en a^+ et b^- .

Exemples et applications.

Exemple 10: $\forall n \geq 0$ est croissante, elle a une limite à gauche et à droite partout mais elle est décroissante en 0.

Corollaire 11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. $\exists (f_n): I \rightarrow \mathbb{R}$ en croissant la limite inférieure égale à f .

Proposition 12: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone, alors elle est décroissante en un nombre en plus dénombrable de points.

Exemple 13: $Q = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur Q .

Pour $n \in]0, 1[$, $f_n := \{n \in \mathbb{N}, f(n) < n\}$.

Alors $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ou $df_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est strictement croissante sur $[0, 1]$ et continue $\forall x \in Q$ dans tous $[0, 1]$.

Théorème 14: (Dini) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes définies sur $I =]a, b[$ qui converge simplement vers f continue sur I .

Alors (f_n) converge uniformément sur I vers f .

Théorème 15: (Composées série intégrale) Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et décroissante. Alors,

on a $\int_0^n f(x) dx - \int_0^n f(x) dx$ converge.

En particulier, $\int_0^\infty f(x) dx$ et $\int_0^\infty f(x) dx$ sont de même nature.

Application 16: La série harmonique diverge.

3) Fonctions à variations bornées.

Définition 17: Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on note $\text{sub}([a, b])$

l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{sub}([a, b])$, $V_n(f) := \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$

On dit que f est à variations bornées lorsque $\exists M > 0$ tel que

$\text{Var } \sigma(f) \leq \Gamma \quad \forall \sigma \in \text{Sub} - (\Gamma, b, \Gamma)$

On pose $V_a^b f = \sup \text{Var } \sigma(f)$

Proposition 18: a) $V_a^d f = \sup_{\sigma \in \text{Sub} - (\Gamma, c, \Gamma)} \text{Var } \sigma(f, \Gamma, \Gamma)$

b) $V_a^b f$ vérifie la relation de Charles.

Proposition 19: Si $f \in \mathcal{C}^1$, f est à variation bornée et $V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx$

Proposition 20: f est à variation bornée si $\exists g, h$ continues telles que $f = g - h$

Exemple 21: $f: \begin{cases} [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in [0, 1] \cup [2, 3], 1 \text{ sinon} \end{cases}$

$c \in \mathcal{C}^1$ $f = 11$ $[1, 2]$. f est à variations bornées.

Contre exemple 21.4: $f: \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \text{ et } 0 \text{ en } 0. \end{cases}$

4) Fonctions de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Définition 22: On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$t \mapsto P(X \leq t)$$

Proposition 23: Toute fonction de répartition est croissante, continue et elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Réciproquement, si une fonction vérifie les hypothèses elle est fonction de répartition d'une v.a.v.

Proposition 24: La fonction de répartition caractérise les l.v.

Définition 25: Soit F une fonction de répartition, on appelle fonction de répartition la fonction $F^{\leftarrow}(u) = \inf \{x, F(x) \geq u\} \quad \forall u \in]0, 1[$.

Proposition 26: Si $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, alors $F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F .

Exemple 27: Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

On définit la répartition de $F^{\leftarrow}: x \mapsto 1 - e^{-\lambda x}$ cf annexe 1.

II) Fonction convexe, concave

1) Définitions et premières propriétés

Définition 28: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

On dit que f est concave lorsque $-f$ est convexe.

Proposition 29: La fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi

$$\forall (a, b) \in I \times \mathbb{R}, \forall y \geq f(a), y \text{ est convexe.}$$

Lemme 30: Tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au dessus du graphe de f . (cf annexe 2)

Proposition 31: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si $\forall x_0 \in I$ (annexe 3)

l'application $g: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Corollaire 32: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\forall x_1 \in I, f$ admet une

dérivée à gauche $f'_g(x)$ et une dérivée à droite $f'_d(x)$ en x .

De plus les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes et $f'_g \leq f'_d$.

Théorème 33: Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. f est convexe

ssi f' est croissante

Ainsi f est au dessus de ses tangentes

Corollaire 34: Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$, f est convexe si $f'' \geq 0$ sur I .

Exemples 35: $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}^+$

Contre exemple 36: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe

$$x \mapsto x^2 \mathbb{1}_{x \geq 0} + \delta_0$$

non décroissante.

2) Inégalité de Jensen

Proposition 37: (Inégalité arithmétique - géométrique).

Soyent $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. On a $(x_1, \dots, x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Proposition 38: (Intégrité de Hölder) Soient deux nombres réels $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

Remarque 39: Dans le cas particulier où $p=q=2$, il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 40: Soient $p \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Alors $\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$.

Application 41: Soit $p \geq 1$: $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$
 est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Application 42: Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$.

On note $\Gamma: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-t} dt$$

$f = \Gamma$ on vérifie $\begin{cases} a) f(x+1) = f(x)x & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ b) f(1) = 1 \\ c) \text{En } f \text{ est continue sur }]0, +\infty[. \end{cases}$

III) Fonctions convexes dans $\mathbb{R}^n$.

Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 43: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque $\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Remarque 44: On définit de même la concavité, strictement concavité...

Exemple 45: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $\|\cdot\|$ est convexe.

Proposition 46: Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue sur U .

Proposition 47: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

f est convexe si $\forall (x, y) \in U^2, f(x) - f(y) \geq D_x f(y - x)$.

Proposition 48: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable, alors f est convexe sur U si $\forall x \in U, D^2 f$ est symétrique défini positif.

Proposition 49: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Alors $\forall f(x) = 0$ si f est minimum sur U en x .

IV) Processus de Galton-Watson.

Application 50: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $\{X_i^{(n)}\}$ une famille de variables de même loi que X .

On définit $m = E[X]$ et

$$(Z_n)_{n \geq 0} \text{ par } \begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n+1)} \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

Alors si $m \leq 1$ et $P(X=1) \neq 1$, alors $P(Z_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Si non, $f > 0$ log $P(Z_n > 0) \geq 0 \quad \forall n \geq 0$.