

Leçon N° 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle.

Dans cette leçon, nous considérons $\mathbb{R}$ muni de ses structures algébriques et topologiques usuelles. On considère également $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide ainsi que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in I$.

1) Continuité.

a) Définition et caractérisations.

Définition 1: On dit que f est continue en a lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Définition 2: f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

Contre exemple 3: $1/\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Proposition 4: (Caractérisation séquentielle de la continuité).

f est continue en a si $\forall$ suite $(x_n) \in I \setminus \{a\}$ convergente vers a , $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Proposition 5: f est continue sur I si $\forall U \subset \mathbb{R}$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert de I si $\forall f \in \mathbb{R}$ fermé, $f^{-1}(F)$ est fermé dans I .

2) Régularité de $\mathcal{C}^0(I)$ et de ses éléments.

Proposition 6: $\mathcal{C}^0(I)$ est un $\mathbb{R}$ -algèbre stable par inverse et composition sous réserve qu'elles soient bien définies.

Exemple 7: Les fonctions polynomiales et fractions rationnelles sont continues lorsqu'elles sont bien définies.

Théorème 8 (Valeurs intermédiaires) Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

$\forall (a, b) \in I$, le segment $[f(a), f(b)]$ est inclus dans $f([a, b])$ i.e. $\forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a, b]$ tq $y = f(x)$.

Corollaire 9: Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Contre exemple 10: Une fonction discontinue peut vérifier le théorème des valeurs intermédiaires? $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Proposition 11: Si f est monotone, l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

Proposition 12: $x \mapsto f \in \mathcal{C}^0(I)$ est strictement croissante sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue et croissante sur $f(I)$.

3) Compacité et continuité uniforme.

Théorème 13: Si I est compact et $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Définition 14: f est uniformément continue sur I lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\forall (x, y) \in I^2$ tq $|x - y| < \eta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Proposition 15: Si f est uniformément continue, alors elle est continue.

Contre exemple 16: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.

Définition 17: Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. f est k -Lipschitzienne sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Proposition 18: Si f est Lipschitzienne sur I , elle est uniformément continue.

Contre exemple 19: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ sans être Lipschitzienne.

Théorème 20 (Heine) Si I est compact et $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors f est uniformément continue.

Application 21: Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors f est limite uniforme sur I de fonction polynomiales (Weierstrass).

II) Dérivabilité

1) Définitions et caractérisations et propriétés

Définition 22: On dit que f est dérivable en a lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe. Lorsque c'est le cas, on le note } f'(a)$$

Définition 23: On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I .

Proposition 24: Si f est dérivable en a , f est continue en a .

Proposition 25: f est dérivable en a si $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = f(a) + c(x-a) + o(x-a)$.

Notation 26: On note $D^1(I)$ (resp $\mathcal{C}^1(I)$) l'ensemble des fonctions dérivables (resp continûment dérivables) sur I .

Proposition 27: $\mathcal{C}^1(I)$ et $D^1(I)$ sont des $\mathbb{R}$ -espaces stables par composition et inverse sous réserve d'être bien définies.

Contre exemple 28: $\mathcal{C}^1(I) \not\subset D^1(I)$ cf $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ $x \neq 0$ $f(0) = 0$

Exemples 29: Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = n x^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R})$

Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$

Si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

Théorème 30 (Rolle) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant: $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$
 $f \in D^1([a, b])$ et $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$. (cf annexe 1).

Théorème 31: (Égalité des accroissements finis)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, $f \in D^1([a, b])$
 alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. (cf annexe 2).

Proposition 32: Une fonction f continue sur I et dérivable sur I est croissante en I si $f' \geq 0$ sur I .

Contre exemple 33: Si I n'est pas un intervalle, ça ne va pas.

cf $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Proposition 34: Si f admet un ensemble relatif en $a \in I$ de x

f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Contre exemple 35: la réciproque est fautive: cf $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$

Lemme 36: Si f est bornée et continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable en

$c \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{t \rightarrow c} C_t(f, t) = 0$ où $C_t(f, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{[t, t+1]}(x) dx$.

Contre exemple 37 (la fonction continue sur $\mathbb{R}$ dérivable nulle part.)

Soient $0 < a < \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$ tq $a < b < 1$.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x)$ fait continue sur $\mathbb{R}$, dérivable

nulle part.

2) Notions d'ordre supérieurs

Définition 38: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est n -fois dérivable en a

lorsque $f^{(n-1)}(a)$ existe et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a .

Notation 39: On note $D^n(I)$ les fonctions n -fois dérivables sur I

$\mathcal{C}^n(I)$ les fonctions n -fois dérivables sur I tq $f^{(n)}$ est continue sur I .

$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(I)$.

Proposition 40: (Formule de Leibniz) Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$fg \in \mathcal{C}^n(I)$ et $\forall x \in I$, $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} f^{(q)}(x) g^{(n-q)}(x)$.

Théorème 41: (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral).

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

Alors $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

théorème 42: (Inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et $D^{n+1}([a,b])$. On suppose qu'il existe $\eta > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b]$,
 $|f^{(n+1)}(t)| \leq \eta$. Alors

$$|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)| \leq \eta \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

théorème 43: (Formule de Taylor-Young). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

contre exemple 44: On peut avoir un développement limité d'ordre n sans être deux fois dérivable. cf $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Application 45: (Inégalités de Cauchy-Schwarz)

1) si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

supposons que f et f'' sont bornés sur $\mathbb{R}$, posons $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

$$\text{alors } M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f''(x)\| \leq \sqrt{2M_0 M_1}$$

2) Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ on pose $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$

On suppose que M_0 et M_n sont finis.

$$\text{Alors } \forall k \in \{0, \dots, n\}, M_k \text{ est fini et } M_k \leq 2 \frac{M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}}{k!}$$

III) Théorèmes de passage à la limite

1) Les séries de fonctions

théorème 46: Si $(f_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{I})^{\mathbb{N}}$ est une suite qui converge uniformément vers une fonction f . Alors $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$.

théorème 47: Si $(f_n) \in \mathcal{C}^p(\mathbb{I})^{\mathbb{N}}$ et $(f_n^{(p)})$ converge simplement vers g $\forall g \in \mathbb{R}, p-1$ et $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers $g^{(p)}$ alors g est $\mathcal{C}^p$ et $g^{(p)} = g^{(p)}$ $\forall g \in \mathbb{R}, p$.

2) Les séries de fonctions

théorème 48: Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{I}$.

théorème 49: Si $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement pour $j \in \{0, p\}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(a)$ $\forall a \in \mathbb{I}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(a)$ $\forall a \in \mathbb{I}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(a)$.