

Leçon N° 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

I) Présentations

1) Définitions et propriétés

Définition 1: Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite récurrente (d'ordre 1) lorsque il existe $f: E \rightarrow E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque 2: Avec les mêmes notations que ci-dessus, la connaissance de $u_0 \in E$ et de f permet de connaître toute la suite (u_n) .

Proposition 3: Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite récurrente vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite l et si f est continue en l , alors l est un point fixe de f , i.e. $f(l) = l$.

2) Suites à valeurs réelles

Proposition 4: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Considérons la suite (u_n) vérifiant:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{Alors:}$$

1) Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

2) Si f est décroissante, la suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et leurs sens de monotonie est opposé.

(cf annexe 1).

Exemples 5.1 (Suite arithmétique). Soit $a \in \mathbb{R}$. (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cette suite est ainsi définie explicitement par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + na$.

2) (Suites géométriques) Soit $q \in \mathbb{R}$. (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cette suite est ainsi définie explicitement par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.

Si $|q| > 1$, (u_n) diverge, si $|q| = 1$ elle est constante, si $|q| < 1$, $u_n \rightarrow 0$.

3) (Suites arithmético-géométriques). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n + a \end{cases}$.

Si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n (u_0 - \frac{a}{1-q}) + \frac{a}{1-q}$.

Proposition 6: Soient $c > 0$ et $f: [0, c] \rightarrow [0, c]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^2 + o(x^2)$ où $a > 0$ et $x > 0$.

Alors la suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 > 0 \text{ assez petit} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

admet l'équivalent suivant: $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} (n \alpha (x-1))^{-\frac{1}{1-\alpha}}$.

3) Suites récurrentes linéaires

Définition 7: On dit qu'une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une relation de récurrence linéaire (homogène) d'ordre k à coefficients constants lorsque $\forall n \geq k: u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}$.

Remarque 8: On peut alors se ramener à une suite du type

$$u_{n+1} = A u_n \quad \text{avec } (u_n) \in (\mathbb{C}^k)^{\mathbb{N}} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Proposition 9: L'équation $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$

s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence (7). Si on note $r_1, \dots, r_k$ ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers tels que $\sum \alpha_i = k$ et r_i est une racine de multiplicité α_i , alors la suite vérifiant (7) est l'ensemble des suites de la forme $u_n = p_1(n) r_1^n + \dots + p_k(n) r_k^n$ où p_i est un polynôme vérifiant $\deg(p_i) < \alpha_i$.

Exemple 10: La suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right) \text{ où } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Lemme 11: On considère la matrice circulaire $A = \begin{pmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors $A = P(\mathcal{J})$ où $P = \sum_{i=1}^n a_{i,1} X^{i-1}$ et $A \sim \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \dots & P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Application 12: Soit $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à n termes.

On définit la suite de polynômes (P_i) par $P_{i+1}, i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$.

Soit $\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{0,i}$ et $(\omega_k)_{k=1, \dots, n}$ les n -racines de P_0 . La suite P_i converge ponctuellement vers le polynôme constant η (cf annexe E).

II) Applications

1) Applications linéaires

Théorème 13: (Banach-Picard). Soit (E, d) un espace métrique complet.

Soit $f: E \rightarrow E$ une application $\mathbb{L}$ -contractante ($0 < \mathbb{L} < 1$),

alors 1) f admet un unique point fixe $x^* \in E$

2) $\forall x_0 \in E$, la suite définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{vérifie } d(u_n, x^*) \leq \frac{\mathbb{L}^n}{1 - \mathbb{L}} d(u_1, u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Application 14: (Couchy) Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle,

E un espace de Banach, $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue,

$b: J \rightarrow E$ continue, $b_0 \in J, x_0 \in E$.

Alors, il existe un unique $x \in \mathcal{C}^1(J, E)$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in J, x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Application 15: (Théorème d'inversion locale).

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que la matrice jacobienne $Df(\alpha)$ est inversible, i.e. $\det Df(\alpha) \neq 0$.

Alors, $\exists V$ ouvert contenant α et contenant dans U et un ouvert W contenant $b = f(\alpha)$ tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

2) Résolution d'équations

Théorème 16: Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $(T, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = T^{-1}N$. On considère la méthode itérative suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall n \geq 1, x_{n+1} = Nx_n + b \end{array} \right. \quad \text{pour résoudre } Ax = b.$$

La méthode itérative converge vers la solution si $\rho(T^{-1}N) < 1$.

Proposition 17: Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\rho(A) \leq \|A\|$.

Réciproquement, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, $\exists$ une norme subordonnée $\| \cdot \|_A, \varepsilon$ telle que $\|A\|_A, \varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Lemme 18: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{L}_A$ α -équivalence entre:

$$1) A \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \|A^n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$3) \rho(A) < 1$$

4) $\exists$ une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

Théorème 19: Soit $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha > 0$ tel que

$V(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $G(y) - G(x) \geq \langle \text{grad } G(x), y - x \rangle + \frac{\lambda}{2} \|y - x\|^2$
 Alors G admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^n$ et la suite (x_k) définie par: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla G(x_k) \end{cases}$

où les λ_k sont tels que $x_k + \lambda_k \nabla G(x_k)$ est un minimum de G sur $k + \|\lambda_k \nabla G(x_k)\|$ converge vers celle bornée inf.

III) Chaînes de Markov

Définition 20: On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans $(E, \mathcal{P}(E))$ est un processus à temps discret si une chaîne de Markov lorsque $\forall (n+1)$ -uplet $(i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$ tel que $P(\bigcap_{0 \leq j \leq n-1} X_j = i_j) > 0$, on a

$$P(X_n = i_n \mid \bigcap_{0 \leq j \leq n-1} X_j = i_j) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

Elle est homogène si cette probabilité ne dépend pas de n .

Notation 21: Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E . Soit $i \in E$. On note $N_i = \# \{n \geq 0, X_n = i\}$.

$$\tau_i^1 = \inf \{n > 0, X_n = i\}$$

$$\text{pour } k \geq 1, \tau_i^k = \inf \{n > \tau_i^{k-1}, X_n = i\}.$$

Définition 22: Soit $i \in E$ et (X_n) une chaîne de Markov sur E .

On dit récurrent lorsque $P(\tau_i < +\infty) = 1$.

Il est dit transient dans le cas contraire.

Lemme 23: $i \in E$ est récurrentssi $E[N_i] = +\infty$.

Application 24: $\forall k \in \mathbb{N}$, la marche aléatoire simple

symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrentssi $k \leq 2$.