

Si c'est trop court, on rajoute un langage théorique.

Leçon N° 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

I) Développements asymptotiques de suites et séries.

A) Auteurs des séries numériques.

Théorème 1: Soient $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ (resp $u_n = o(v_n)$), resp $u_n = O(v_n)$

1) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$

(resp $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$), resp $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$

2) Si la série $\sum v_n$ diverge, alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

(resp $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$), resp $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$

Théorème 2: (Comparaison série intégrale) Soient $f \in \mathbb{N}$,

$\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et décroissante.

Alors $\sum_{n \geq p} \varphi(n)$ et $\int_p^{+\infty} \varphi(x) dx$ ont même nature.

De plus $\sum_{n \geq p} \varphi(n) - \int_p^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge.

Définition 3: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, la série

$\sum \frac{1}{n}$ étant la série harmonique.

Lemme 4: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := H_n - \ln(n)$ et $v_n := u_n - \frac{1}{n}$

On a alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et

convergent vers une constante $\gamma > 0$ (constante d'Euler).

Proposition 5: un développement asymptotique de H_n est

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exemple 6: pour $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$$1) \forall \alpha > 1, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2) Suites définies par récurrences.

Dans ce paragraphe, on pose $A \in \mathbb{R}$ non vide, $f: A \rightarrow A$ et $\alpha \in A$. On cherche à étudier la suite définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Théorème 7: Soit $c > 0$ et supposons que $A = [0, c]$ et que f est continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \alpha x^\alpha + o(x^\alpha)$ où $\alpha > 0$ et $\alpha > 1$. Alors la suite définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 > 0 \text{ assez petit} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ admet l'équivalent suivant: $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n \alpha (\alpha-1))^{-\frac{1}{\alpha-1}}$.

Application 8: $A = [0, \frac{\pi}{2}]$, $u_0 \in A$, $f = \sin$.

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ alors}$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Application 9: $A = (\mathbb{R}^+)$, $u_0 > 0$, $f(x) = \ln(x+x)$

$$f_{n+1} = f(u_n) \text{ alors,}$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

3) Suites définies implicitement.

Exemple 10: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note en la plus grande racine réelle

de $X^{2n} - 2nX + 1$. Alors on a $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

Exemple 11: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + u_n - 1 = 0$

On a le développement asymptotique $u_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Exemple 12: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

l'unique point d'annulation de $x \mapsto x \sin(x) - \cos(x)$ > 0
Alors $u_n \sim n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$

II) Développement Limites et asymptotiques de fonctions

1) Développement Limites d'une fonction au voisinage d'un point

Soit I un intervalle, $a \in \mathbb{F} \cap \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition 13: On dit que f admet un développement limité (D.L.) d'ordre n en a (D.L.(a)) lorsqu'il $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f(x-a) = P(x-a) + o((x-a)^n)$$

Proposition 14: Si f admet un D.L.(a), celui-ci est unique.

Exemple 15: une fonction polynomiale admet un D.L.(a).

$$1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + o(x^n)$$

Proposition 15: (Taylor-Lagrange) Si $a \in \mathbb{F}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

$$\text{Exemples } 1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$2) (1+x)^2 = 1 + 2x + \dots + \frac{2(x-1)(x-1+1)}{2!} + o(x^2)$$

2) On des fonctions définies à l'aide d'une intégrale.

Théorème 17: Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$

(resp $f(x) = o(g(x))$, resp $f(x) = O(g(x))$)

Alors 1) Si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^x f \sim_{x \rightarrow b} \int_a^x g$

(resp $\int_a^x f = o(\int_a^x g)$, resp $\int_a^x f = O(\int_a^x g)$)

2) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f \sim_{x \rightarrow b} \int_a^b g$

(resp $\int_a^b f = o(\int_a^b g)$, resp $\int_a^b f = O(\int_a^b g)$)

Exemples 18: 1) $\forall \alpha > 0, \frac{1}{x} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$

$$2) \ln(x) = o\left(\int_1^x \frac{dt}{t^{\alpha}}$$

$$3) \int_1^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \int_1^{\frac{x}{\ln(x)}} \frac{1}{\ln(t)} dt + o\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$$

$$4) \int_1^{\infty} e^{-t^2} dt \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

III) Applications

Lemme 19: La fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

est $\phi_N: t \mapsto e^{-t^2/2}$ où $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$= e^{-t^2/2}$$

Lemme 20: (Lévy) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a. com. ($\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{P}$) space

probabil. de $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ $\iff \phi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi_X$

Application 21: (Théorème central limite) Soit (X_n) une suite de v.a.

des
variables

il est admettant un moment d'ordre 2. On note $p = E[X_i]$ et $\sigma^2 = V(X_i)$

Alors
$$\frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{np\sigma^2}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$$

Application 22: On peut retrouver la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Application 23: Un algorithme de base d'une liste de taille n a une complexité $\geq \Omega(n \log(n))$.