

Leçon N° 223 : Suites numériques, Convergence et volume d'adhérence. Exemples et applications

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Présentations.

1) Suites numériques et limites.

Définition 1: Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 2: Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que la suite (u_n) converge vers λ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - \lambda| < \varepsilon.$$

Définition 3: On dit qu'une suite (u_n) est bornée lorsque, il existe $M > 0$

$$\text{tq } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Proposition 4: Il y a unicité de la limite.

Proposition 5: Toute suite convergente est bornée.

Comme exemple $\mathbb{C} : (-1)^n$ est bornée divergente.

Définition 7: Une suite (y_n) est une sous-suite de (u_n) lorsque $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = u_{f(n)}$.

Définition 8: Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Théorème 9: $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ si elle est de Cauchy.

Théorème 10: (de Césaro) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$

alors la suite de terme général $y_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ converge vers λ .

Comme exemple 11 : La récurrence est facile, cf $u_n = (-1)^n$.

2) Cas des suites réelles.

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 12: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u_n est croissante (resp décroissante)

lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (resp $u_n \geq u_{n+1}$)

Montrer l'existence d'un inf

Théorème 13: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Si (u_n) est croissante majorée (resp

décroissante minorée) alors (u_n) converge et $\lim u_n = \sup(u_n)$

(resp $\lim u_n = \inf u_n$).

Définition 14: Deux suites réelles sont adjacentes lorsque

1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

2) $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 15: Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors

elles convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Exemple 16: $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Application 17: (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Proposition 18: Le passage à la limite préserve les inégalités larges.

Proposition 19: (Enchaînement) Soit $(u_n), (v_n)$ et $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont telles que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \text{ alors } w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Définition 20: Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On pose $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf_{p \geq n} x_p)$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{p \geq n} x_p)$

qui existent dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition 21: (x_n) converge dans $\mathbb{R}$ si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$

auquel cas cette valeur est la limite de (x_n) .

3) Volume d'adhérence et éparéssion.

Définition 22: On appelle volume d'adhérence d'une suite

numérique (u_n) l'ensemble de ses limites de sous-suites

convergente de (u_n) .

Proposition 23: Toute suite convergente ne possède que sa limite

comme volume d'adhérence.

Contre exemple 24: $(1 - (-1)^n)^n$ ne possède que 0 comme valeurs d'adhérence, pourtant, elle diverge.

Proposition 25: Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$.
 $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$ si et seulement si $u_{2n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$.

Théorème 26: (Critère de Weier) Soit $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $\chi_n(a, b) = \# \{k \in [1, n] \mid u_k \in [a, b]\}$.
 Il y a équivalence entre:

1) $\chi_n(a, b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a \quad \forall (a, b) \in [0, 1]^2$.

2) $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt$.

3) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} = 0$.

Exemple 27: Soit $0 > 0$ et $\in \mathbb{Q}$, $(n0 \pmod{1})$ est équirépartie.

II) Relations de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 28: On dit que (u_n) est dominée par (v_n) lorsqu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $|u_n| \leq C |v_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On note $u_n = O(v_n)$.

Définition 29: On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, |u_n| < \varepsilon |v_n|$. On note $u_n = o(v_n)$.

Définition 30: On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) lorsque $u_n - v_n = o(v_n)$. On note $u_n \sim v_n$.

Proposition 31: 1) $u_n = O(v_n)$ si $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n v_n$.

2) $u_n = o(v_n)$ si $\exists (e_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = e_n v_n$.

3) $u_n \sim v_n$ si $\exists (e_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = (1 + e_n) v_n$.

Proposition 32: $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Application 33: La série harmonique est équivalente à $\ln(n)$.

III) Différentes définitions de suites

1) Fonction explicite.

Définition 34: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est définie de manière explicite lorsqu'il existe $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.

2) Suites récurrentes (d'ordre 1).

Définition 35: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est récurrente d'ordre 1 lorsqu'il existe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1}$.

Remarque 36: La connaissance de cette fonction et du premier terme de la suite permet de calculer entièrement une suite récurrente.

Proposition 37: Si une suite récurrente (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite l et si f est continue en l , alors $l = f(l)$.

Proposition 38: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subseteq I$. Soit (u_n) vérifiant $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Alors 1) si f est constante, (u_n) est monotone et son sens de monotonie est déterminé par le signe de $u_1 - u_0$.

2) Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante et u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones de monotonie opposées.

(Cf Annexe).

Exemple 39: 1) Une suite arithmétique est une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$.

Elle est aussi définie explicitement par $u_n = u_0 + na$.

2) Une suite géométrique est une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n q$. Elle est aussi définie explicitement par $u_n = u_0 q^n$. Si $|q| > 1$, (u_n) diverge. Si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.

3) Une suite arithmético-géométrique est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n + a$. Si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = q^n u_0 + a \frac{q^n - 1}{q - 1}$ avec $r = \frac{a}{1-q}$.

Application 40: Soient $c > 0$ et $f: [0, c] \rightarrow [0, c]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - a x^2 + o(x^2)$ où $a > 0$ et $c > 1$. Alors la suite définie par récurrence $\begin{cases} u_0 > 0 \text{ assez petit} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ admet l'équivalent suivant $u_n \sim \frac{1}{n+1} \frac{1}{1-a}$.

3) Séries numériques

Définition 41: Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Si (S_n) converge, on note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sa limite et on appelle reste d'indice n $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k := \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n$.

Exemple 42: 1) Les séries de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ où $a_n \in \mathbb{K}$ et divergente dès que $a \neq 0$. Leurs sommes partielles valent $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \frac{n(n+1)}{2}$.

2) Les séries de type $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n$ convergent si $|q| < 1$. Si $q \neq 1$, les sommes partielles valent $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition 43: Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 44: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 .

- 1) Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- 2) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 45: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 telles que $u_n \sim v_n$. Alors:

- 1) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
- 2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n v_k \sim \sum_{k=0}^n u_k \sim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k$.

Lemme 46: (Comparaison série intégrale).

Soient $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et décroissante.

Alors la suite (U_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx$ est convergente. (cf lemme 2).

Exemple 47: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Exemple 48: $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \log n}$ converge si $\alpha > 1$ et $\beta \geq 1$.

Lemme 49: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

On a alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacents et convergent vers une constante $\neq 0$.

Application 50: La série harmonique admet pour développement asymptotique: $\ln \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

degré
pénalité