

Leçon N° 2.2.1 : Équations différentielles linéaires. Systèmes

Soyent $I \subset \mathbb{R}$ et K un corps ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Présentation

1) Notation et définitions

Définition 1 : Soient $A_0, \dots, A_p : I \rightarrow M_n(K)$ ($A_p \neq 0$) et $b : I \rightarrow K^n$ continue. On appelle équation différentielle (ordinaire) linéaire (homogène E.D.L.) l'équation (E) du type : $\sum_{i=0}^p A_i y^{(i)}(t) = b(t)$.

Lorsque $b=0$, on dit que (E) est homogène, sinon on parle de second membre.

Lorsque $A_p = I_n$, on dit que (E) est réduite.

Remarque 2 : Les solutions d'une E.D.L. d'ordre p sont dans $\mathcal{C}^p(I, K^n)$.

Notation 3 : Dans la suite, A et B seront fixés et supposés continus.

On cherche à résoudre (E) : $y' = Ay + B$.

On note (H) : $y = Ay$ E.D.L. homogène.

Remarque 4 : Chercher une solution de E.D.L. réduite d'ordre p $y^{(p)} + A_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + A_1y' + A_0y = b$ est équivalent à résoudre E.D.L. d'ordre 1 suivante : $y' = Cpy + B$ où $y = \begin{pmatrix} y^{(p-1)} \\ y \end{pmatrix}$, $Cp = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 5 : On appelle problème de Cauchy linéaire la donnée d'une E.D.L. et d'une condition initiale : $\begin{cases} y' = Ay + B \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où $(t_0, y_0) \in I \times K^n$.

Équations différentielles linéaires. Exemples et applications

2) Théorème de Cauchy-Lipschitz et existence des solutions

Proposition 6 : $SI(H)$ est un système espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, K^n)$ et $SI(E)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, K^n)$ privé pour $SI(H)$.

Lemme 7 : (Bourlès-Picard) : Soit (E/I) un espace métrique complet. Soit $f : E \rightarrow E$ une application q -contractante ($q \in]0, 1[$).

Alors : 1) f admet un unique point fixe $x^* \in E$

2) $\forall x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifie $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x^*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Théorème 8 : (Cauchy-Lipschitz) : Soit $I \subset \mathbb{R}$, E un espace de Banach $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ $\varphi_0, b : I \rightarrow E$, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$

Alors $\exists ! x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ tel que : $\begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Cas des exemples : (unicité) (E) $\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ $t \mapsto 0$ et $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ sont

solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

(existence) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $]\mathbb{R}^?]$ sur $]\mathbb{R}^?]$ $t \mapsto \frac{1}{1-t}$

sur $]-\infty, 1[$ $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Corollaire 10 : Soit $t_0 \in I$. $\varphi_t : SI(H) \rightarrow K^n$ est un isomorphisme de K -ev

En particulier $\dim(SI(H)) = n$.

Définition 11 : Une base de $SI(H)$ est appelé système fondamental de $SI(H)$.

3) Notion de wronskien

Soit B une base de F .

Définition 12: Soit $(a_1, \dots, a_n) \in S_E(H)^n$. Les w -ordonnées de $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$ est $w: t \mapsto \det \mathcal{B}(a_1(t), \dots, a_n(t))$.

Proposition 13: Soit $(a_1, \dots, a_n) \in S_E(H)^n$, $L(A, S, E)$.

i) $(a_1, \dots, a_n)$ est un système fondamentel de (H) .

ii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

iii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$.

Remarque 14: Pour $(H): y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$.

Si $(a_1, \dots, a_n)$ est une famille de solutions de (H) , alors:

$$w(t) = \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_n(t) \\ a_1'(t) & a_2'(t) & \dots & a_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)}(t) & a_2^{(n-1)}(t) & \dots & a_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Lemme 15: $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (W)$, $\det \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n) = \det \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n)$.

Proposition 16: (Wronski). Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (S_E(H))^n$.

Le w -ordonnée w de $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$ vérifie $w' = w(A)w$.

II) Résolutions explicites.

On cherche à résoudre $E = Ay + B$ ou A et B sont constants.

1) Résolution de l'équation homogène.

Proposition 17: Si A est constante, alors $S_E(H) = \{t \mapsto e^{tA}C \mid C \in M_n(\mathbb{C})\}$.

Exemple 18: $S_{\mathbb{R}}(y') = \frac{1}{1+t^2}y(t) = \mathbb{R}^0 \exp o(\arctan)$

Proposition 18: Si $(H): y' = P(t)y$ où $P = \prod_{i=1}^n (x - t_i)$ où $t_i \in \mathbb{R} \setminus I$

et $\mathcal{B}$ est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ de dérivation, alors

$$S_E(H) = \{t \mapsto e^{\int P(t)} P_1(t), \dots, P_n(t), P_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})\}$$

Exemple 19: (E.D.O.) Linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Soit $A = x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$, $D := b^2 - 4c$,
et $(H): y'' + by' + c = 0$.

1) Si $D > 0$, alors $S_{\mathbb{R}}(H) = \mathbb{R} \exp(r_1 \cdot) + \mathbb{R} \exp(r_2 \cdot)$

2) Si $D = 0$, alors $S_{\mathbb{R}}(H) = (\mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot) \exp(r_1 \cdot)$

3) Si $D < 0$, alors $S_{\mathbb{R}}(H)$ (alors $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\omega$)

$$w = (\mathbb{R} \cos(\omega \cdot) + \mathbb{R} \sin(\omega \cdot)) \exp(\alpha \cdot)$$

2) Techniques de recherches d'une solution particulière.

Méthode 20: (variation de la constante): Soit A une primitive de a .

Il existe une fonction dérivable λ en I telle que $t \mapsto e^{At} \lambda(t)$ est solution de (E) . On peut prendre λ une primitive de $e^{-At} a$.

$$\text{Exemple 21: } S_{\mathbb{R}}(y' + \frac{t}{1+t^2}y = \frac{1+3t^2}{1+t^2}) = \{t \mapsto t + \frac{1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Corollaire 22: (Duhamel) Si a est constante, alors la solution du problème de Cauchy $\{y' = ay + b, y(t_0) = y_0\}$ est $y: t \mapsto e^{(t-t_0)a} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b ds$.

Exemple 23: La solution du problème de Cauchy $\{y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y, y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^t - e^t \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix}$

Méthode 24: Soit $a_0, \dots, a_{n-1}, b, I \rightarrow \mathbb{R}$ sont développables en série entières (D.S.E.) au voisinage de $t_0 \in I$, alors l'équation $(E): y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b$ admet une solution développable en série entière au voisinage de t_0 . On trouve les coefficients par

Unité de développement en série entière.

Application 25: (Bessel). On considère $E: xy'' + y' + xy = 0$.

1) Il existe unique f_0 solution DSE. à E et f_0 vérifie $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$.

C'est $f_0: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k}$

2) Si f est une solution de E sur $]0, \infty[$, alors

(f_0, f) linéaire si f pas nulle en 0

3) $\forall x \in (R, f_0(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta$

III) Etude qualitative en dimension 2.

1) EOL nées d'origine 2

Proposition 26: Soient $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, considérons

(H1) $y'' + p y' + q y = 0$.

1) Si (p, q) est un système fondamentaux de (H1), alors p et q ne s'annulent pas en même temps.

2) Le système d'un solution non nulle de (H) sont isolés.

Proposition 27: Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle.

1) Soit y_1, y_2 solutions de (H1) $y'' + q y = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'annule au moins une fois.

2) Tout solution non nulle de (H1) $y'' + q y = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'annule au plus une fois.

Proposition 28: Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'équation

$y'' + q y = 0$ admet au moins une solution non nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Lemme 29: (Cronwall) Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $p, q, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

continues telles que $\forall t \in [a, b], y(t) \leq p(t) + \int_a^t q(s) y(s) ds$

Alors $\forall t \in [a, b], y(t) \leq p(t) + \int_a^t q(s) p(s) ds$ et $y(t) \leq p(t)$ sur $[a, b]$.

Proposition 30: Soit $q \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ continue. La solution de

(H1) $y'' + q y = 0$ avec $y(0) = 1, y'(0) = 0$ est une solution de

2) EOL homogène dans le plan, portants de plan.

Définition 31: Un portant de plan est une représentation géométrique de la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace au sein de son espace d'état.

Remarque 32: Le théorème de Cauchy assure que les trajectoires ne s'intersectent pas.

Exemple 33: Classification des portants plans de $(y')' = A(y)$ en fonction du signe de $\text{tr}(A)$, $\det(A)$, et $\det(A) - \frac{1}{4}(\text{tr}(A))^2$ (cf annexe).

Exemple 34: (pendule simple). Le mouvement d'un pendule simple par l'équation $\theta'' = -p\theta' - \frac{g}{L} \sin(\theta)$.

g: accélération du pendule, L: longueur du pendule, p: résistance à l'air, θ angle orienté du pendule.

Approximation des petits angles $\sin \theta \approx \theta$. Non résolu sur $\mathbb{R}^+$.

Lorsque θ proche de π , $\sin(\theta) \approx -\theta$.

Les points $(0, 2g\pi, 0)$ et $(\pi + 2g\pi, 0)$ sont respectivement des points stables et un point instable.