Leçon N° 219 : Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction où U est une partie $\neq \emptyset$ de E.

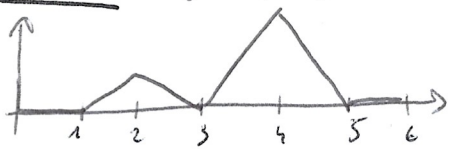
I) Existence et unicité d'extrema.

Définition 1 : On dit que f admet un minimum local (resp maximum local) en $a \in U$ lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap U$, $f(x) \geq f(a)$ (resp $f(x) \leq f(a)$)

Définition 2 : On dit que f admet un minimum global (resp maximum global) sur U lorsque $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(a)$ (resp $f(x) \leq f(a)$).

Définition 3 : On appelle extremum local (resp global) de f un minimum ou un maximum local (resp global).

Exemple 4 : La fonction f dont le graphe est : ($x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).



a un maximum local en 2 mais non global. Il a un maximum global en 4. (donc local).

1) Utilisation de la notion de compacité.

Proposition 5 : Si U est compact, alors si f est continue, alors $f(U)$ est compact.

Corollaire 6 : Si U est compact et f continue, f est bornée et atteint ses bornes.

Contre exemple 7 : 1) Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$ mais n'atteint pas ses bornes.

2) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 sinon. n'est pas bornée.

Définition 8 : On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est coercive lorsque $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.

Application 9 : Si f est continue et coercive, alors f admet un minimum sur E.

2) Utilisation de la notion de convexité.

On suppose ici que U est convexe, i.e $\forall (x, y) \in U^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in U$.

Définition 10 : On dit que f est convexe lorsque $\forall (x, y) \in U^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Elle est strictement convexe lorsque l'inégalité est stricte.

Exemple 11 : $\|\cdot\|$ est convexe sur E.

Proposition 12 : Soit f est convexe, l'ensemble des points réalisant le minimum de f est un convexe. Si f est strictement convexe, alors il existe au plus un point réalisant ce minimum.

Contre exemple 13 : $\exp$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de minimum.

Définition 14 : Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien, on dit que c'est un espace de Hilbert lorsqu'il est complet.

Exemple 15 : $L^2(\mathbb{R})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.

Théorème 16 : (projection sur un convexe fermé). Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.
$\forall x \in H$, $\exists ! \, p_C(x) \in C$ tq $\|x - p_C(x)\| = d(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$.
De plus $p_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - p_C(x) | x - y \rangle) \leq 0$
Dans le cas où C est un sev fermé de H, le projeté $p_C(x)$ est caractérisé par $p_C(x) \in C$ et $x - p_C(x) \in C^\perp$. (cf Annexe 2)

Application 17 : (théorème de représentation de Riesz).
Soit H un espace de Hilbert et l une forme linéaire continue sur H
$\exists ! \, y \in H$ tq $l(x) = \langle x, y \rangle$. En particulier $H \simeq H'$.

dep. 1

3) Optimisation et holomorphie

Dans cette section : $E = \mathbb{C}$, U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f est holomorphe sur U. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $B(a,r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r et $C(a,r)$ son bord.

Théorème 18 (Formule de Cauchy) : $\forall a \in U$, $\forall r > 0$ tq $B(a,r) \subset U$, on a $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$.

Proposition 19 (Principe du maximum local) : Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.

Proposition 20 (Principe du maximum global) : Si U est bornée et f continue sur $\bar{U}$, alors $\sup_U |f| = \max_{\bar{U}} |f|$ et si ce maximum est atteint en un point de U, alors f est constante.

Théorème 21 (Liouville) : Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée, alors f est constante.

Application 22 (D'Alembert-Gauss) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

II) Optimisation des fonctions différentiables

Dans ce chapitre, U est supposé ouvert.

1) Conditions du premier ordre

Définition 23 : On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$, $h \to 0$.

L'application ℓ qui est unique est appelée différentielle de f en a.

Définition 24 : Soit $x \in U$, on dit que x est un point critique de f lorsque $Df_x = 0$.

Proposition 25 : Si x^* est un extremum local de $f : U \to \mathbb{R}$ et si f est différentiable en x^*, alors x^* est un point critique de f.

Contre exemple 26 : $x \longmapsto x^3$ a un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.

Théorème 27 : Soit $f : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Proposition 28 : Si U est convexe et f convexe et différentiable, alors chaque point critique de f est un minimum global de f.

2) Conditions du deuxième ordre

Proposition 29 : On suppose $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et soit $a \in U$.

1) Si f admet un minimum local en a, alors $D_a f = 0$ et $\mathrm{Hess}_a f$ est une forme bilinéaire positive.

2) Si a est un point critique et $\mathrm{Hess}_a f$ est une forme bilinéaire définie positive, alors f admet un minimum local en a.

Contre exemple 30 : 1) $f : (x,y) \longmapsto x^2 - y^3$ vérifie $\mathrm{Hess}_{(0,0)} f$ est positive mais $(0,0)$ n'est pas un minimum local de f.

2) $g : (x,y) \longmapsto x^2 + y^4$ admet un minimum strict en $(0,0)$ mais sa hessienne n'est pas définie en $(0,0)$.

Théorème 31 : On suppose U convexe. Alors

1) f est convexe ssi $\forall (x,y) \in U^2$, $f(x) \geq f(y) + dy\, f(x-y)$.

2) f est strictement convexe ssi $\forall x \neq y$, $f(x) > f(y) + dy\, f(x-y)$.

3) Extremas liés

Théorème 32 : Soient $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $X = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Si $f|_X$ admet un minimum local en $a \in X$ et si

$(d_a g_1, \dots, d_a g_p)$ est libre, alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $d_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_a g_i$.

Application 33 : (Inégalité de Hadamard) Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Alors $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2$

Application 34 : (Théorème Spectral) Si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors $\exists$ BON de E formé de vecteurs propres de u. En posant $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ et $g : x \mapsto \|x\|_2$ ainsi que $S = \{x \in E, g(x) = 1\}$ on trouve un maximum sur S et le théorème nous fournit un vecteur propre.

III) Algorithmes d'optimisation numérique.

1) Descente de gradient

Définition 35 : On cherche à construire (x_n) une suite minimisante pour f, en cherchant à chaque itération dans la direction de plus forte décroissante locale. Pour cela, on choisit $x_0 \in U$ et on définit x_{n+1} réalisant le minimum de $t > 0 \mapsto f(x_n + t d_n)$ où $d_n = -\nabla f(x_n)$.

Théorème 36 : Soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $G(y) - G(x) \geq \langle \text{grad } G(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$. Alors G admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^n$ et la suite (x_q) définie par
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall q \in \mathbb{N}, \; x_{q+1} = x_q + \lambda_q \nabla G(x_q). \end{cases}$$
où λ_q est tel que $x_q + \lambda_q \nabla G(x_q)$ est un minimum de G sur $x_q + \mathbb{R} \nabla G(x_q)$ converge vers cette borne inf.

2) Méthode de Newton.

Proposition 37 : Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant qu'une seule fois sur $[c, d]$. On pose alors la suite récurrente suivante :
$$\begin{cases} x_0 \in [c, d] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Alors en notant a l'unique zéro de f, on a :
- $\exists \alpha > 0$ tq si $x_0 \in]a - \alpha, a + \alpha[$, alors (x_n) converge de manière quadratique vers a : $\exists C > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$
- Si de plus f est strictement convexe avec $f'(a) > 0$, alors $\forall x_0 \in]a, d]$, (x_n) est strictement décroissante et converge vers a. Cf annexe 2.

Remarque 38 : Si $f \in \mathcal{C}^3([c, d], \mathbb{R})$ on peut trouver les minimum en appliquant cette méthode à f'.

Exemple 39 : $f : x \mapsto x^2 - y$ pour $y > 0$
La méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$.