

Leçon N° 2.15: Applications différentiables, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Exemples et applications.

Soyent $U = \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application.

I) Applications différentiables

A) Différentielles

Définition 1: On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsque $\exists F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire (continue) telle que $f(a+h) = f(a) + F(h) + o(\|h\|)$

Proposition 2: Si L existe, alors elle est unique, on l'appelle la différentielle de f en a , notée $D_a f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

Définition 3: Supposons que f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U et $df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est appelée la différentielle de f .

Exemple 4: Les applications linéaires et les applications affines sont différentiables sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5: Si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en $a \in I$ si f est dérivable en a et dans ce cas $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_a f \cdot h = h f'(a)$

Proposition 6: f différentiable en $a \Rightarrow f$ continue en a .

Proposition 7: $Q := \{f: U \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ différentiable en } a \mid a \in U, \mathbb{R}\text{-en-} \text{ et } \forall f, g \in Q, \forall a \in \mathbb{R}, D_a(xf + g) = xD_a f + D_a g\}$.

Proposition 8: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p, g: V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, g \circ f \in V$.

Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a)$,

alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D_a(g \circ f) = D_{f(a)} g \circ D_a f$.

Proposition 9: (Formule de Leibniz): $D(f \otimes g) = (df) \otimes g + f \otimes (Dg)$.

Proposition 10: Si $\mathbb{R}^n$ est engendré et si $f: U = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est

différentiable en a , les $J_1 f \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}^n, D_a f \cdot h = \langle \nabla f, h \rangle$ et ∇f est le gradient de f en a .

2) Dérivées partielles.

Définition 11: Soient $a \in U, v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v lorsque $\forall t \in \mathbb{R}, \forall t \neq 0, f(a+tv) = f(a) + t D_v f(a) + o(t)$ où $D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$.

Proposition 12: f est différentiable en a , alors f dérivable en a selon tout vecteur et $\forall h \in \mathbb{R}^n, D_a f \cdot h = \nabla f(a) \cdot h$.

Contre-exemple 13: On peut être dérivable selon tous les vecteurs sans être différentiable: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} y^2/x & \text{lorsque } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 14: $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f dérivable en a , la i -ème dérivée partielle de f en a est $f_{e_i}(a)$ notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$.

Proposition 15: Si f est différentiable en a , alors $D_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

Définition 16: Soient f est différentiable en a , on définit sa matrice jacobienne (comme étant $J_a f := (D_i f(a))_{1 \leq i, j \leq n}$).

3) Applications de classe C^1 et accroissement

dans cette partie, on suppose f différentiable sur U .

Définition 17: On dit que f est de classe C^1 sur U lorsque df est continue.

Exemple 18: Les applications linéaires sont C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Les applications bilinéaires sont C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Levi

Exemple 19 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est $\varphi' \sin \varphi$ sur $(0, \pi/2)$
 $\pi \mapsto \sin(\pi)$
 le plus $\forall x, H \in \mathbb{R}^n$, $D_{\text{act}}(x) (H) = G_1(x) \tilde{X}(H)$
 en $\tilde{X}$ est la courbure de x .
Application 20 (Courbure) Soient $y_1, \dots, y_n$ les solutions $\tilde{X}$ valeurs
 dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel linéaire $y' = A(t)y$, ont
 $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.
 Alors le Wronskien de $(y_1, \dots, y_n)$ vérifie $W'(t) = G_1(A(t)) W(t)$.
 En particulier $\det(e^{tA}) = e^{\int_0^t G_1(A(s)) ds}$.

Théorème 21 (Intégration des recouvrements plans) - Soient $(x, y) \in U$.
 Si $\tilde{X}$ existe $\forall \gamma > 0$ tel que $\|D_\gamma f\| \leq \gamma \forall \gamma \in U$,
 Alors $\|f(y) - f(x)\| \leq \gamma \|y - x\|$.
Application 22 Soit f_n une suite de fonctions $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable
 telle que : 1) (f_n) converge simplement sur U
 2) (Df_n) converge uniformément sur U .
 Alors, la fonction limite f est différentiable et $Df = \lim Df_n$.
 De plus, si la suite f_n est φ' , la fonction f est φ' .
Exemple 23 exp : $\sin(\pi) \rightarrow \cos(\pi)$ est φ' .
Corollaire 24 Si U est convexe et si $\|Df\| \leq M \forall x \in U$, alors
 f est convexe.
Corollaire 25 Si U est convexe et si $Df = 0 \forall x \in U$, alors f
 est constante.
Théorème 26 $f \in \varphi'$ si $\forall x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$, Df existe en tout point de
 U et est continue.
Contre-exemple 27 fonction différentiable non φ' .
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4) Lien avec l'holonomie

Proposition 28 Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec U ouvert.
 On identifie $U \subset \mathbb{R}^n$ via $x \mapsto y \mapsto (x, y)$.
 Si est holomorphe sur U si f est différentiable en U et
 son différentielle est une similitude directe
 ce qui revient au même que la vérification des équations de Cauchy-
 Riemann : On a $\partial_x = \partial_x$ et $\partial_y = -\partial_x$.

II) Différentielle d'ordre supérieur (ordre 2)

On suppose f différentiable sur U .

1) Différentielle successive

Définition 29 On dit que f est deux fois différentiable en $x \in U$
 lorsque Df est différentiable en x .
 $D^2 f = D(Df)$ est la différentielle de l'ordre 2 de f en x .
 f est dite de classe φ^2 lorsque $D^2 f$ est la classe φ^2 .
Définition 30 Si f est deux fois différentiable en $x \in U$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$.

Proposition 31 Si f est deux fois différentiable en x , alors
 $D^2 f$ est bilinéaire $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D^2 f(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j$.
Définition 32 Supposons $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est deux fois
 différentiable en x , alors $D^2 f$ est une forme bilinéaire sur
 $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est
 la matrice $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ = matrice hessienne de f en x .
Théorème 33 (Schwarz) Si f est deux fois différentiable en x , alors $D^2 f$
 est bilinéaire symétrique : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
 En particulier, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Contre exemple 34: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \text{ ou } y=0 \\ x^2 \arctan(\frac{y}{x}) - y^2 \arctan(\frac{x}{y}) & \text{sinon} \end{cases}$

2) Formule de Taylor

Définition 35: On définit par récurrence les fonctions à 0-fois différentiables

Exemple 36 Les fonctions polynomiales sont $\mathcal{C}^\infty$

Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégrale) Soient

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^{k+1}, a \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } [a, a+h] \subset U. \text{ Alors:}$$

$$f(a+h) - f(a) = D_a f \cdot h + \dots + \frac{1}{k!} D_a^k f(a) \cdot h^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D_a^{k+1} f(a+th) \cdot h^{k+1} dt.$$

(Remarque 1)

3) Extrema locaux

1) $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Définition 38: 1) $a \in U$ est un maximum (resp. minimum) local de f lorsque

$$\exists V \subset U(a) \subset U \text{ tel } \forall v \in V, f(v) \leq f(a) \text{ (resp. } f(v) \geq f(a)).$$

2) $a \in U$ est un minimum global (resp. maximum) de f lorsque

$$\forall v \in U, f(v) \leq f(a) \text{ (resp. } f(v) \geq f(a)).$$

Théorème 39: 1) Si f admet un extremum en a et si $D_a f$ existe, alors

$$D_a f = 0. \text{ (On est en point critique de } f)$$

2) a minimum local de f ; si $D_a^2 f$ existe, alors $D_a^2 f = 0$ et $D_a^2 f$ est

une forme quadratique positive.

3) Si $D_a f = 0$ et $D_a^2 f$ est une forme quadratique définie positive,

alors f admet en a un minimum local strict.

Contre exemple 40: 1) $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ mais $f'(1) \neq 0$

$$2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mais } f'(0) = 0$$

$$3) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ en } a=0 \text{ mais } f'' = 12x^2 \text{ n'est pas}$$

III) Inversion locale

(à remonter)

Théorème 41: Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que

$$\det Df(a) \neq 0. \text{ Alors } \exists V \text{ ouvert de } U \text{ contenant } a \text{ et ouvert } V$$

$$\text{contenant } f(a) \text{ tel que } f|_V \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } V \text{ sur } W.$$

Exemple 42: Le changement en coordonnées polaires:

$$(x,y) \mapsto (r,\theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ est un changement de variable}$$

est un difféomorphisme.

Application 43: exp: $\text{Mat}(n) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ est surjective.

Corollaire 44: (fonctions implicites) $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \varphi \mapsto f(x,y)$

On suppose que la différentielle en b de

$$y \mapsto f(x,y) \text{ est inversible.}$$

Alors $\exists$ voisinage ouvert $U \subset U_0$ de a , $b \in U$ et

$$\varphi: U \rightarrow U_0 \text{ tel que}$$

$$\forall (u,y) \in U \times U_0, f(u,y) = 0 \text{ si } y = \varphi(u).$$

(à remonter)